Grundlagen der Informatik 2
Grundlagen der Digitaltechnik

3. Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Teich

Dr.-Ing. Christian Haubelt

Lehrstuhl für Hardware-Software-Co-Design

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Normalformtheoreme
  - Ermöglichen eine **eindeutige** (*kanonische*) **Darstellung** jeder **beliebigen Schaltfunktion**
  - Schaltfunktionen sind **allein** durch **3 logische Operationen** realisierbar ***Und***, ***Oder*** und ***Negation***
  - Der **Boolesche Entwicklungssatz** ist eine formelle Methode zur gezielten **Umwandlung** jedes **beliebigen schaltalgebraischen Ausdrucks** in eine der beiden Normalformen

    Ergebnis: eine der kanonischen **Darstellungen KNF** bzw. **DNF**
  - Weiterhin erhält man durch Anwendung des **Booleschen Entwicklungssatzes** die Darstellung einer Schaltfunktion als **BDD**.

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Minterme
  - **Terme m_i**:
    für **genau eine Belegung** wird der **Wert ´1´** angenommen;
    “orthogonale Basisfunktionen“ zur **Bildung der DNF**
  - “Projektion“ von Einsstellen auf beliebige Positionen
    im Symmetriediagramm
  - “**Auswahl**“ der richtigen **Funktionswerte** in **DNF**
    -> **Einsstellenmenge**

Minterme		$f(x_2,x_1)$
m_0	$\overline{x_2} \& \overline{x_1}$	f(0,0)
m_1	$\overline{x_2} \& x_1$	f(0,1)
m_2	$\overline{x_2} \& x_1$	f(1,0)
m_3	$x_2 \& x_1$	f(1,1)

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Maxterme
  - **Terme M_i**:
    für **genau eine Belegung** wird der **Wert ´0´** angenommen;
    “orthogonale Basisfunktionen“ für **Bildung der KNF**
  - “Projektion“ von Nullstellen auf beliebige Positionen
    im Symmetriediagramm
  - “**Auswahl**“ der richtigen **Funktionswerte** in **KNF**
    -> **Nullstellenmenge**

Maxterme		$f(x_2,x_1)$
M_0	$x_2 \vee x_1$	$f(0,0)$
M_1	$x_2 \vee \overline{x_1}$	$f(0,1)$
M_2	$\overline{x_2} \vee x_1$	$f(1,0)$
M_3	$\overline{x_2} \vee \overline{x_1}$	$f(1,1)$

DNF (Disjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in DNF-Form**:

  besteht aus mehreren ***disjunktiv*** verknüpften (-> *Oder*-Funktion) **Termen**, die aus ***konjunktiv*** verknüpften (-> *Und*-Funktion) **Literalen** bestehen

  <u>Beispiele</u>:

$$f(x) = (x_1 \& x_2 \& x_3) \vee (x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \& x_2 \& \overline{x_3}) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$$

$$f(x) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \& x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

DNF (Disjunktive Normalform)

- **Also:**

DNF listet alle **Belegungen**, die den **Funktionswert ´1´** erzeugen sollen, einzeln auf

$$f(x) = (\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}) \vee (x_1 \,\&\, \overline{x_2})$$

x_1	x_2	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

KNF (Konjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in KNF-Form:**

  besteht aus mehreren ***konjunktiv*** verknüpften **Termen**, die aus ***disjunktiv*** verknüpften **Literalen** bestehen

- Beispiel:

$$f(x) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

KNF (Konjunktive Normalform)

- **Also:**

  bei der **KNF** entspricht **jeder Term** von **konjunktiv** verknüpften **Literalen** einer “**invertierten Belegung**“ mit **Funktionswert ´0´**.
  Tritt diese Wertkombination auf, so wird der entspre-chende Term ´0´ und der komplette Schaltfunktionswert wird auch ´0´

x_1	x_2	f(x)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(x) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \,\&\, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Der **Entwicklungssatz** ist eine formale Methode, eine **Funktion f(x_n, ... , x_3, x_2, x_1)** in eine **DNF** (oder KNF) umzuwandeln

  – Die **Entwicklung der Funktion f nach der Variablen x_i**

  -> Aufteilung in **zwei Fälle**: $x_i = 1$ und $x_i = 0$

$$f(x_n,\ldots,x_i,\ldots,x_1) = [x_i \,\&\, f(x_n,\ldots,1,\ldots,x_1) \vee [\overline{x_i} \,\&\, f(x_n,\ldots,0,\ldots,x_1)] =$$

$$= [x_i \,\&\, f|_{x_i=1}] \qquad \vee [\overline{x_i} \,\&\, f|_{x_i=0}]$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- **Oder für eine KNF:**

$$f(x_n,\ldots,x_i,\ldots,x_1) = [x_i \vee f(x_n,\ldots,0,\ldots,x_1)] \,\&\, [\overline{x_i} \vee f(x_n,\ldots,1,\ldots x_1)]$$

$$= \left[x_i \vee f\big|_{x_i=0}\right] \qquad \& \left[\overline{x_i} \vee f\big|_{x_i=1}\right]$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Beweis der beiden Fälle:

$$
\begin{aligned}
f(x_n, \ldots, x_i = 1, \ldots, x_1) &= \left[1 \,\&\, f\big|_{x_i=1}\right] \vee \left[\overline{1} \,\&\, f\big|_{x_i=0}\right] \\
&= \left[1 \,\&\, f\big|_{x_i=1}\right] \vee \left[0 \,\&\, f\big|_{x_i=0}\right] \\
&= f\big|_{x_i=1} \vee 0 \\
&= f\big|_{x_i=1}
\end{aligned}
$$

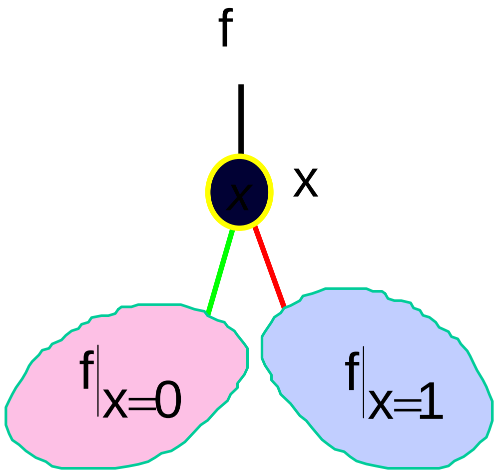
$$
\begin{aligned}
f(x_n, \ldots, x_i = 0, \ldots, x_1) &= \left[0 \,\&\, f\big|_{x_i=1}\right] \vee \left[\overline{0} \,\&\, f\big|_{x_i=0}\right] \\
&= \left[0 \,\&\, f\big|_{x_i=1}\right] \vee \left[1 \,\&\, f\big|_{x_i=0}\right] \\
&= 0 \vee f\big|_{x_i=0} \\
&= f\big|_{x_i=0}
\end{aligned}
$$

Anwendung 1: BDD-Bestimmung

- BDDs basieren auf dem Booleschen Entwicklungssatz:
  - Pro Variable hat die Funktion zwei Restfunktionen bzw. sog. Co-Faktoren

$f|_{x=0}$ Resultat für x=0

$f|_{x=1}$ Resultat für x=1



Anwendung 1: BDD-Bestimmung

- Gegeben sei die Schaltfunktion

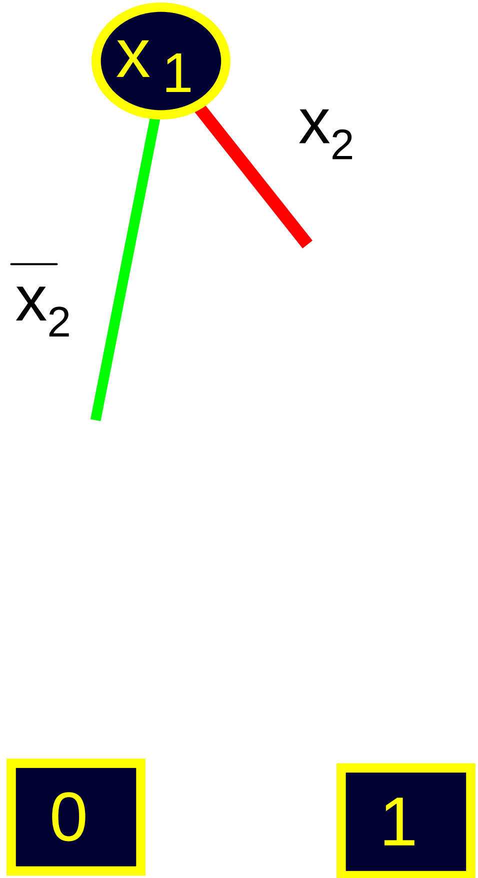
$$f(x_2, x_1) = (x_1 \,\&\, x_2) \vee (\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2})$$

- Gesucht: OBDD
- Lösung: Entwicklung von f nach x_1:

$$f = (x_1 \,\&\, f|_{x_1=1}) \vee (\overline{x_1} \,\&\, f|_{x_1=0})$$

$$f|_{x_1=1} = (1 \,\&\, x_2) \vee (0 \,\&\, \overline{x_2}) = x_2$$

$$f|_{x_1=0} = (0 \,\&\, x_2) \vee (1 \,\&\, \overline{x_2}) = \overline{x_2}$$



Anwendung 1: BDD-Bestimmung

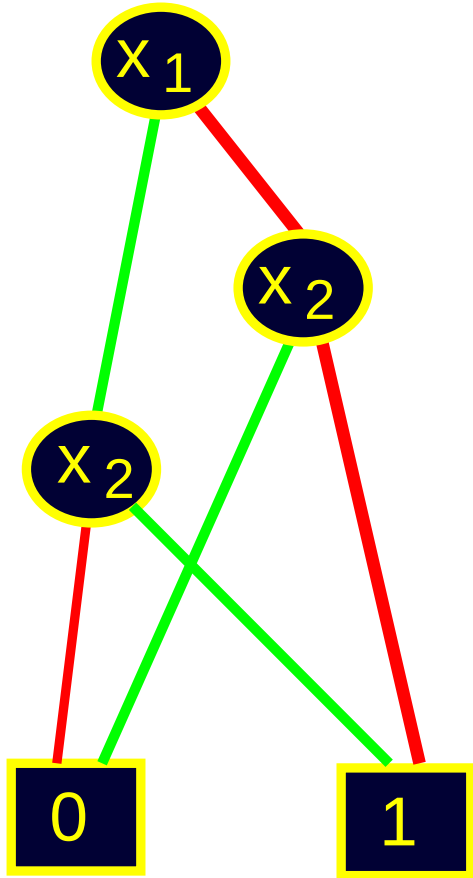
- Gegeben sei die Schaltfunktion

$$f(x_2,x_1) = (x_1 \,\&\, x_2) \vee (\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2})$$

- Nun: Entwicklung der Restfunktionen nach x_2:

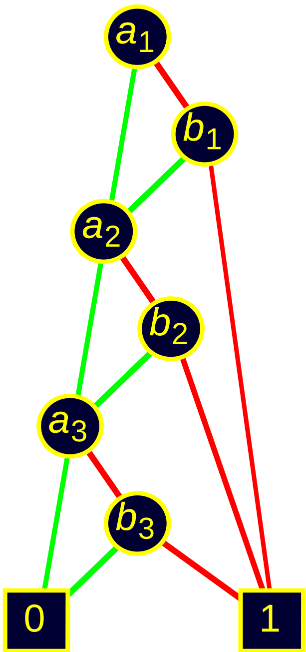
$$x_2 = (x_2 \,\&\, 1) \vee (\overline{x_2} \,\&\, 0)$$

$$\overline{x_2} = (x_2 \,\&\, 0) \vee (\overline{x_2} \,\&\, 1)$$

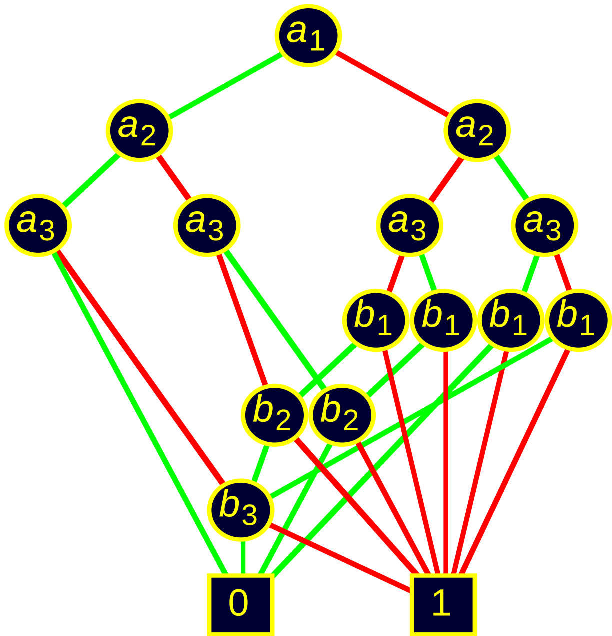


Variablenordnung

- BDDs sind eindeutig für eine gegebene Variablenordnung
- Daher werden O(rdered)BDDs verwendet (feste Ordnung)
- Ordnung bestimmt maßgeblich die Größe von BDDs



$$(a_1 \wedge b_1) \vee$$
$$(a_2 \wedge b_2) \vee$$
$$(a_3 \wedge b_3)$$



Anwendung 2: Bestimmung der DNF

- $f\big|_{x_i=1}$ und $f\big|_{x_i=0}$ werden als **Restfunktionen** oder **Kofaktoren** bezeichnet

- der nach x_i entwickelte Ausdruck lässt sich nach den weiteren Variablen entwickeln

Beispiel einer Funktion mit zwei Variablen:

$$y = f(x_2, x_1) = x_1 \,\&\, f(x_2,1) \vee \overline{x_1} \,\&\, f(x_2,0)$$

Entwicklung nach x_1

$$= x_2 \,\&\, \left[x_1 \,\&\, f(1,1) \vee \overline{x_1} \,\&\, f(1,0)\right] \vee$$
$$\overline{x_2} \,\&\, \left[x_1 \,\&\, f(0,1) \vee \overline{x_1} \,\&\, f(0,0)\right]$$

Entwicklung nach x_2

$$= \underbrace{x_2 \,\&\, x_1}\,\&\, f(1,1) \vee x_2 \,\&\, \overline{x_1} \,\&\, f(1,0) \vee \overline{x_2} \,\&\, x_1 \,\&\, f(0,1) \vee \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_1} \,\&\, f(0,0)$$

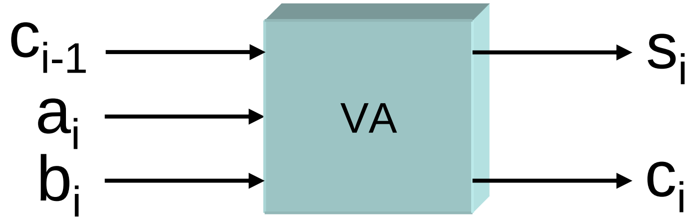
$$= m_3 \,\&\, f_3 \vee m_2 \,\&\, f_2 \vee m_1 \,\&\, f_1 \vee m_0 \,\&\, f_0$$

$$= \bigvee_{j=0}^{3} (m_i \,\&\, f_i)$$

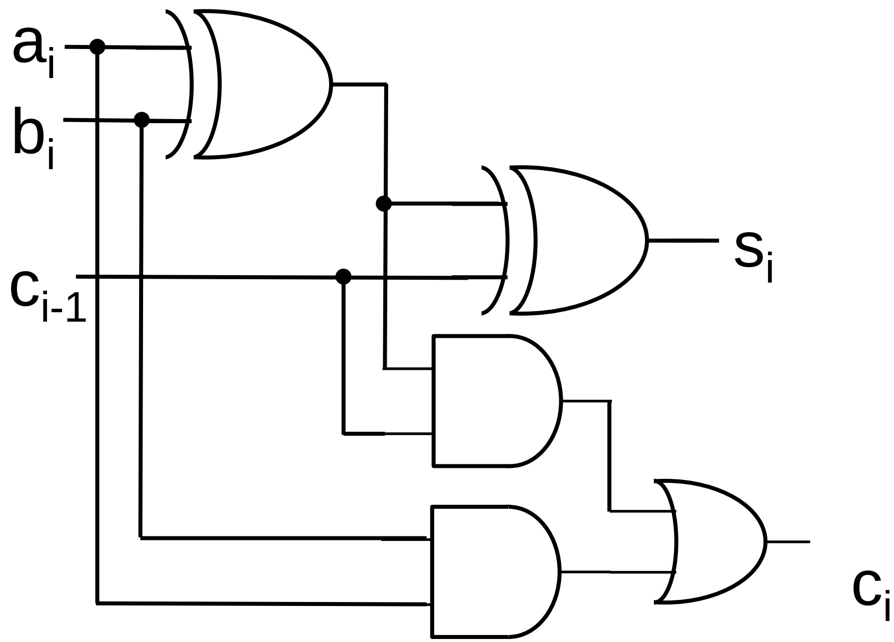
DNF

Anwendung 2: Bestimmung der DNF

- Beispiel: Addition zweier Binärzahlen S = A+B
  Aufbau einer Volladdiererzelle

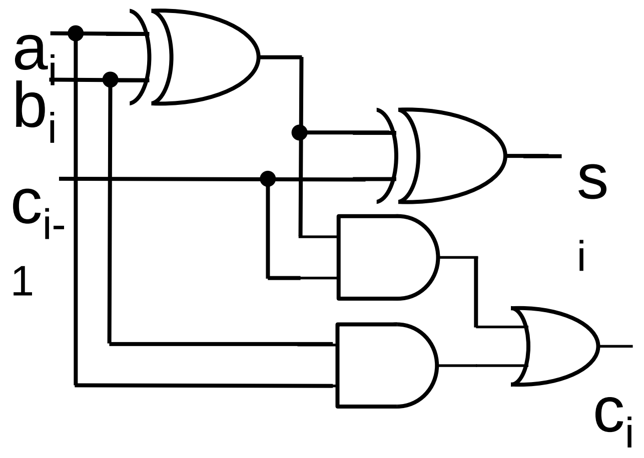


c_{i-1}	a_i	b_i	s_i	c_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



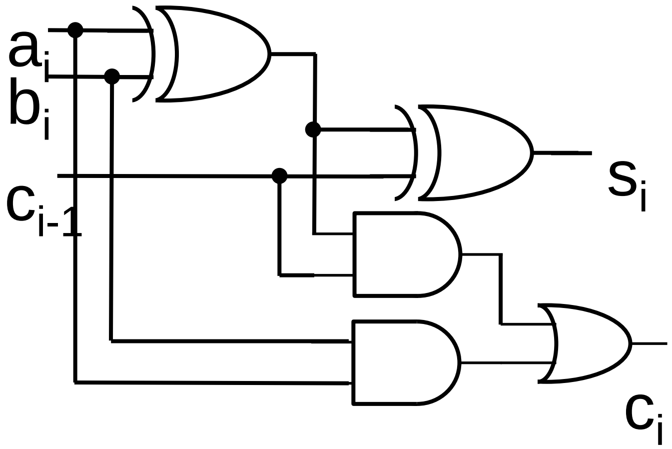
Anwendung 2: Bestimmung der DNF

- Beispiel: Addition zweier Binärzahlen S = A+B
  Aufbau einer Volladdiererzelle



$$
\begin{aligned}
s_i &= a_i \ \text{xor} \ b_i \ \text{xor} \ c_{i-1} \\
&= a_i \,\&\, \overline{(b_i \ \text{xor} \ c_{i-1})} \vee \overline{a_i} \,\&\, (b_i \ \text{xor} \ c_{i-1}) \\
&= b_i \,\&\, a_i \,\&\, (\overline{\overline{c_{i-1}}}) \vee b_i \,\&\, \overline{a_i} \,\&\, (\overline{c_{i-1}}) \vee \overline{b_i} \,\&\, a_i \,\&\, (\overline{c_{i-1}}) \vee \overline{b_i} \,\&\, \overline{a_i} \,\&\, (c_{i-1}) \\
&= (c_{i-1} \,\&\, b_i \,\&\, a_i) \vee (c_{i-1} \,\&\, \overline{a_i} \,\&\, \overline{b_i}) \vee (\overline{c_{i-1}} \,\&\, b_i \,\&\, \overline{a_i}) \vee (\overline{c_{i-1}} \,\&\, \overline{b_i} \,\&\, a_i)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Volladdierer



c_{i-1}	a_i	b_i	s_i	c_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

DNF:

$$s_i = (\overline{c_{i-1}} \,\&\, \overline{a_i} \,\&\, b_i) \vee (\overline{c_{i-1}} \,\&\, a_i \,\&\, \overline{b_i}) \vee (c_{i-1} \,\&\, \overline{a_i} \,\&\, \overline{b_i}) \vee (c_{i-1} \,\&\, a_i \,\&\, b_i)$$

Basissysteme der Schaltalgebra

- **<u>Es gilt</u>**: Die **Normalformtheoreme** und der **Hauptsatz der Schaltalgebra** zeigen die **eindeutige Darstellbarkeit** beliebiger Schaltfunktionen mittels der **3 Grundverknüpfungen** ***Konjunktion***, ***Disjunktion*** und ***Negation***

Daher: man bezeichnet diese **3 Verknüpfungen [&, V, ¯]** als ein **Basissystem der Schaltalgebra**

Weiterhin: - es existieren **weitere Basissysteme**
- lassen sich mittels der **De Morgan´schen Theoreme** vom ersten Basissystem **ableiten**:

$$\overline{x_2 \vee x_1} = \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_1} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{x_2 \,\&\, x_1} = \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$$

<u>Also</u>: Neben dem bereits vorgestellten Basissystem mit **3 Verknüpfungen [&, V, ¯] existieren Basissysteme** mit **zwei** oder gar **einem Operator**

Basissysteme der Schaltalgebra

<u>Beispiel</u>: Herleitung von **Basissystemen** mit **2 Verknüpfungen**
[V, ¯] bzw. **[&, ¯]** ausgehend von **DNF** bzw. **KNF**

$y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} \left(f_j \,\&\, m_j\right)$	bzw.	$y = \mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} \left(f_j \vee M_j\right)$
$y = \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} \left(f_j \,\&\, m_j\right)}}$	bzw.	$y = \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{\mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} \left(f_j \vee M_j\right)}}$
$y = \overline{\mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} \overline{\left(f_j \,\&\, m_j\right)}}$	bzw.	$y = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} \overline{\left(f_j \vee M_j\right)}}$
$y = \overline{\mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} \left(\overline{f_j} \vee \overline{m_j}\right)}$	bzw.	$y = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} \left(\overline{f_j} \,\&\, \overline{M_j}\right)}$

Basissysteme der Schaltalgebra

<u>Weiterhin:</u> **DNF realisiert nur Minterme $f_j = 1$ und**
KNF realisiert nur Maxterme $f_j = 0$

$$\overline{f_j} = 0$$

$$\overline{f_j} \vee \overline{m_j} = \overline{m_j}$$

und

$$\overline{f_j} = 1$$

$$\overline{f_j} \,\&\, \overline{M_j} = \overline{M_j}$$

man erhält:

$$y = \overline{\&}\,\overline{m_j}\Big|_{f_j=1}$$

$$y = \overline{\bigvee}\,\overline{M_j}\Big|_{f_j=0}$$

Basissysteme der Schaltalgebra

Also: Man erhält **zwei neue Basissysteme**
mit jeweils nur einer **einzigen Verknüpfung**,
denn: $[\overline{\&}]$ und $[\overline{\vee}]$ bilden ebenfalls Basissysteme der Schaltalgebra

wobei: Negationen einzelner Variablen werden mit Konstanten 0 / 1 dargestellt:

$$x = x \& 1 \qquad\qquad x = x \vee 0$$

$$\overline{x} = \overline{x \& 1} \qquad\qquad \overline{x} = \overline{x \vee 0}$$