Kapitel 7

Das Multibutterfly-Netzwerk

Nachdem wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, daß der Ansatz über Oblivious Routing immer zu einem schlechten Laufzeitverhalten im worst case führt, werden wir in diesem Abschnitt ein Netzwerk mit konstantem Grad und $N = n(\log n + 1)$ Prozessoren vorstellen: das Multibutterfly-Netzwerk. Es kann mit folgenden Eigenschaften beliebige Permutationen routen:

- Es hat n Eingabeprozessoren und n Ausgabeprozessoren;
- Es benötigt kein Preprocessing;
- Die Puffergröße ist 1;
- Die Routing-Zeit ist $O(\log n)$.

Zur Konstruktion dieses Netzwerkes benötigen wir einen sehr interessanten Typ von Netzwerken, nämlich sog. Konzentratoren. Ihnen ist der folgende Abschnitt gewidmet. Sie gehören zu der Klasse der sog. **Expander**.

7.1 Konzentratoren

7.1 Definition:
Seien $\alpha, \beta \in I\!R^+$, $m, c \in I\!N$, und sei m eine gerade Zahl. Ein bipartiter Graph $G = (A \cup B, E)$ heißt **(α, β, m, c)-Konzentrator**, falls gilt:

(i) $|A| = m$, $|B| = m/2$;

(ii) Knoten aus A haben maximalen Grad c, Knoten aus B haben maximalen Grad $2c$;

(iii) **(Expansionseigenschaft)**:

$$\text{Für alle } X \subseteq A, |X| \leq \alpha \cdot m, \text{ gilt: } |\Gamma(X)| \geq \beta \cdot |X|$$

D. h.: Jede Knotenmenge aus A (bis zu einer bestimmten Größe) hat sehr viele Nachbarn in B. Wir sagen auch, daß A **expandiert**, und nennen β den **Expansionsfaktor**.

Wegen der Eigenschaft (iii) gilt $\alpha \cdot \beta \leq \frac{1}{2}$, denn sonst wäre Eigenschaft (i) verletzt.

Aus solchen Konzentratoren werden wir unser effizientes Routing-Netzwerk konstruieren. Dazu benötigen wir Konzentratoren mit konstantem Grad und Konstanten α und β, wobei $\beta > 1$ sein muß.

Es ist möglich, Konzentratoren zu konstruieren [LPS88, ?] (sie sind sogar recht einfach), allerdings sind die Korrektheitsbeweise methodisch sehr aufwendig (Funktionalanalysis und algebraische Graphentheorie spielen eine wesentliche Rolle), und der resultierende Expansionsfaktor β zwar größer als 1, aber doch nur sehr klein, relativ zu c. Wir werden nun die *Existenz* guter Konzentratoren nachweisen.

7.2 Satz:
Für $\alpha \leq \frac{1}{2\beta}\left(4\beta \cdot e^{1+\beta}\right)^{-\frac{1}{c-\beta-1}}$ gibt es (α, β, m, c)-Konzentratoren.

Beweis:
Betrachte die im folgenden definierte Klasse $\mathcal{R}$ von bipartiten Graphen $G = (A \mathbin{\dot\cup} B, E)$, $A = [m]$, $B = [m/2]$.

Für eine beliebige Permutation $\pi : A \to A$ sei $E_\pi = \{(i,j) \in A \times B \mid \pi(i) \in \{j, j + m/2\}\}$. Wir erzeugen also durch die Permutation π ein Matching auf einem bipartiten Graphen mit jeweils m Knoten auf beiden Seiten und „klappen" dann auf einer Seite eine Hälfte der Knoten auf die andere Hälfte der Knoten. Sei $\mathcal{R} = \{G = (A \mathbin{\dot\cup} B, E) \mid E = E_{\pi_1} \cup \cdots \cup E_{\pi_c}$ für Permutationen $\pi_1, \ldots, \pi_c : A \to A\}$.

Jeder Graph $G \in \mathcal{R}$ erfüllt durch seine Definition bereits die Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 7.1. Wir zeigen nun, daß es mindestens einen Graphen $G \in \mathcal{R}$ gibt, so daß für G auch Bedingung (iii) erfüllt ist.

Dazu betrachten wir das Zufallsexperiment, zufällig unabhängig c Permutationen $\pi_1, \ldots, \pi_c$ zu wählen. Wir sagen dann: Wir wählen zufällig einen Graphen $G \in \mathcal{R}$ mit Kantenmenge $E_{\pi_1} \cup \cdots \cup E_{\pi_c}$.

7.3 Lemma:
Sei G ein zufällig aus $\mathcal{R}$ gewählter Graph. Dann gilt:

$$\mathrm{Prob}(G \textit{ ist kein } (\alpha, \beta, m, c)\textit{-Konzentrator}) < 1$$

Vor dem Beweis dieses Lemmas folgern wir zuerst daraus den Satz 7.2:

Wegen Lemma 7.3 ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig aus $\mathcal{R}$ gewählter Graph ein (α, β, m, c)-Konzentrator ist, echt größer als 0. Das heißt aber, daß es in $\mathcal{R}$ mindestens einen (α, β, m, c)-Konzentrator gibt, denn sonst wäre die oben genannte Wahrscheinlichkeit ja 0.

Diese Argumentation ist ein sogenanntes **probabilistisches Existenz-Argument**. Es ist sehr elegant, wenn es in erster Linie um die Existenz und nicht um die Konstruktion gewisser Objekte geht. Wie bereits erwähnt, ist es äußerst schwierig, für Graphenfamilien die Konzentratoren-Eigenschaft nachzuweisen, dagegen ist der Beweis von Lemma 7.3 technisch relativ einfach. Es wird nur elementares Rechnen benötigt. □ (Satz 7.2)

Beweis von Lemma 7.3:
In der folgenden Abschätzung wird die Eigenschaft, kein Konzentrator zu sein, genauer formalisiert. Wir berechnen in der Wahrscheinlichkeit gerade das Verhältnis der Zahl an „Nicht-Konzentratoren" zu der Zahl der Graphen in $\mathcal{R}$ überhaupt.

$$\mathrm{Prob}(G \text{ ist kein } (\alpha, \beta, m, c)\text{-Konzentrator})$$

$$
\begin{aligned}
&\le \mathrm{Prob}(\exists X \subseteq A, |X| \le \alpha \cdot m : |\Gamma(X)| < \beta \cdot |X|) \\
&\le \mathrm{Prob}(\exists \mu \le \alpha \cdot m, \exists X \subseteq A, \exists Y \subseteq B : |X| = \mu \wedge |Y| = \lfloor \beta \cdot \mu \rfloor \wedge \Gamma(X) \subseteq Y) \\
&\le \sum_{\mu=1}^{\alpha\cdot m} \sum_{\substack{X\subseteq A \\ |X|=\mu}} \sum_{\substack{Y\subseteq B \\ |Y|=\lfloor\beta\cdot\mu\rfloor}} \mathrm{Prob}(\Gamma(X) \subseteq Y)
\end{aligned}
$$

Seien $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ mit $|X| = \mu$ und $|Y| = \lfloor \beta \cdot \mu \rfloor$ beliebig aber fest. Wir schätzen jetzt $\mathrm{Prob}(\Gamma(X) \subseteq Y)$ ab.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(\Gamma(X) \subseteq Y) \\
&\quad = \mathrm{Prob}\Big(\bigwedge_{i=1}^{c} \pi_i(X) \subseteq Y \cup \underbrace{\{j + m/2 \mid j \in Y\}}_{=:\,Y'} \Big) \\
&\quad = \prod_{i=1}^{c} \mathrm{Prob}(\pi_i(X) \subseteq Y \cup Y') \qquad \text{(da die } \pi_1, \ldots, \pi_c \text{ unabhängig gewählt sind)} \\
&\quad \le \prod_{i=1}^{c} \frac{\mu! \cdot \binom{2\lfloor\beta\mu\rfloor}{\mu} \cdot (m-\mu)!}{m!} \qquad (7.1) \\
&\quad \le \prod_{i=1}^{c} \left(\frac{2\cdot\beta\cdot\mu}{m} \cdot \frac{2\cdot\beta\cdot\mu-1}{m-1} \cdot \frac{2\cdot\beta\cdot\mu-2}{m-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2\cdot\beta\cdot\mu-\mu+1}{m-\mu+1} \right) \\
&\quad \le \prod_{i=1}^{c} \left(\frac{2\cdot\beta\cdot\mu}{m} \right)^{\mu} = \left(\frac{2\cdot\beta\cdot\mu}{m} \right)^{c\cdot\mu}
\end{aligned}
$$

Die Abschätzung (7.1) begründet sich folgendermaßen: Da X und Y fest gewählt sind, fragen wir nach der Anzahl der Permutationen über $A = [m]$, die X nach $Y \cup Y'$ abbilden. Beachte, daß wir hier das Hineinklappen der Permutation π_i wieder rückgängig gemacht haben, und daß $|Y \cup Y'| \le 2\lfloor\beta\mu\rfloor$ ist. Es gibt $\binom{2\lfloor\beta\mu\rfloor}{\mu}$ Möglichkeiten, Teilmengen der Größe μ in $Y \cup Y'$ zu wählen, und damit $\mu! \cdot \binom{2\lfloor\beta\mu\rfloor}{\mu}$ Möglichkeiten, die Werte aus X nach $Y \cup Y'$ abzubilden. Zusätzlich haben wir $(m-\mu)!$ Möglichkeiten, die restlichen Funktionswerte zu wählen. Diese Zahl wird ins Verhältnis zur Gesamtzahl $m!$ der möglichen Permutationen gesetzt.

Die so berechnete Abschätzung für $\mathrm{Prob}(\Gamma(X) \subseteq Y)$, die ja nicht von der Wahl von X und Y abhängt, setzen wir nun ein.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}(G \text{ ist kein } (\alpha,\beta,m,c)\text{-Konzentrator}) \\
&\quad \le \sum_{\mu=1}^{\lfloor\alpha\cdot m\rfloor} \sum_{\substack{X\subseteq A \\ |X|=\mu}} \sum_{\substack{Y\subseteq B \\ |Y|=\lfloor\beta\cdot\mu\rfloor}} \left(\frac{2\cdot\beta\cdot\mu}{m} \right)^{c\cdot\mu} \\
&\quad \le \sum_{\mu=1}^{\lfloor\alpha\cdot m\rfloor} \binom{m}{\mu} \cdot \binom{m/2}{\lfloor\beta\mu\rfloor} \cdot \left(\frac{2\cdot\beta\cdot\mu}{m} \right)^{c\cdot\mu} \\
&\quad \le \sum_{\mu=1}^{\lfloor\alpha\cdot m\rfloor} \left(\frac{e\cdot m}{\mu} \right)^{\mu} \cdot \left(\frac{e\cdot m/2}{\beta\cdot\mu} \right)^{\beta\cdot\mu} \cdot \left(\frac{2\cdot\beta\cdot\mu}{m} \right)^{c\cdot\mu} \qquad \text{(s. Lemma 7.4)} \\
&\quad = \sum_{\mu=1}^{\lfloor\alpha\cdot m\rfloor} \left[\left(\frac{m}{\mu} \right)^{1+\beta-c} \cdot e^{1+\beta} \cdot (2\cdot\beta)^{c-\beta} \right]^{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&< \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\alpha^{c-1-\beta} \cdot e^{1+\beta} \cdot (2\beta)^{c-\beta}}_{=:\, r} \Big)^{\mu} \qquad (\text{da } \mu \leq \alpha \cdot m) \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

Das letzte „$\leq$" gilt, wenn $r \leq \frac{1}{2}$ ist, denn es gilt $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{\mu} = 1$ (unendliche geometrische Reihe).

$r \leq \frac{1}{2}$ gilt aber wegen der Voraussetzung des Satzes, denn:

$$
\begin{aligned}
\alpha \;\; &\leq \;\; \frac{1}{2\beta} \left(4\beta \cdot e^{1+\beta}\right)^{-\frac{1}{c-\beta-1}} = \left(\left(\frac{1}{2\beta}\right)^{c-\beta-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\beta} \cdot e^{-(1+\beta)} \right)^{\frac{1}{c-\beta-1}} \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{c-\beta} \cdot e^{-(1+\beta)} \right)^{\frac{1}{c-\beta-1}} = \left(\tfrac{1}{2} \cdot (2\beta)^{-(c-\beta)} \cdot e^{-(1+\beta)}\right)^{\frac{1}{c-\beta-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\Longleftrightarrow \qquad \tfrac{1}{2} \geq \alpha^{c-\beta-1} \cdot (2\beta)^{c-\beta} \cdot e^{1+\beta} = r
$$

$\square$ (Lemma 7.3)

Die oben benutzte Abschätzung für Binomialkoeffizienten wird oft angewandt. Darum soll sie hier nicht unbewiesen bleiben.

7.4 Lemma:
Für $k, \ell \in I\!N$, $0 \leq \ell \leq k$, gilt: $\binom{k}{\ell} \leq \left(\frac{k \cdot e}{\ell}\right)^{\ell}$

Beweis:

$$
\binom{k}{\ell} = \frac{k \cdot (k-1) \cdots (k-\ell+1)}{\ell!} \leq \frac{k^{\ell}}{\ell!} = \frac{k^{\ell}}{\ell^{\ell}} \cdot \frac{\ell^{\ell}}{\ell!} \leq \frac{k^{\ell}}{\ell^{\ell}} \cdot e^{\ell}, \text{ da } e^{\ell} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ell^i}{i!} \geq \frac{\ell^{\ell}}{\ell!} \text{ gilt.} \qquad \square
$$

Man beachte, daß in der Bedingung „$\alpha \leq \frac{1}{2\beta} \overbrace{\left(4\beta \cdot e^{1+\beta}\right)^{-\frac{1}{c-\beta-1}}}^{(*)}$" der Term $(*)$ bei konstantem β für wachsenden Grad c (sehr schnell) gegen 1 geht, also $\alpha \cdot \beta$ sehr nah an den größtmöglichen Wert $\frac{1}{2}$ herankommt.

7.5 Beispiel:
Für $\beta = 2$ und $c = 4$ hat zu gelten $\alpha \leq \frac{1}{32e^3}$. Das ist für $\alpha = \frac{1}{643}$ der Fall. Satz 7.2 garantiert uns dann die Existenz eines $(\frac{1}{643}, 2, m, 4)$-Konzentrators.

7.2 Definition des Multibutterfly-Netzwerks

Aus den gerade vorgestellten Konzentratoren bauen wir jetzt unser Netzwerk, auf dem wir schnell routen können. Dazu „verdoppeln" wir zuerst die Konzentratoren zu sog. Teilern.

7.6 Definition:
Ein $\boldsymbol{(\alpha, \beta, m, c)}$**-Teiler** (oder auch **-Splitter**) ist ein bipartiter Graph $(A \mathbin{\dot\cup} (B_0 \cup B_1), E_0 \cup E_1)$, wobei $(A \mathbin{\dot\cup} B_0, E_0)$ und $(A \mathbin{\dot\cup} B_1, E_1)$ jeweils (α, β, m, c)-Konzentratoren sind. Der Grad eines (α, β, m, c)-Teilers ist $2c$. Eine Kante nach B_0 heißt **0-Kante**, eine nach B_1 **1-Kante**.