Rolf Wanka
Alexander Raß

Erlangen, 25. April 2019

Übungen zur Vorlesung

# Organic Computing

SS 2019

Blatt 1

**Diese Übungen finden am 3./8. Mai als Tafel-Übung statt:**
**3. Mai: um 08:15 Uhr in Raum 00.151-113,**
**8. Mai: um 10:15 Uhr in Raum 00.151-113.**
**Ggf. bitte auf diesbezügliche Emails achten.**

Dynamische Systeme arbeiten häufig „gedächtnislos", d. h. der Nachfolgezustand $\vec{x}_{t+1}$ des Systems hängt nur vom aktuellen Zustand $\vec{x}_t$ des Systems ab und nicht zusätzlich davon, wie man in diesen Zustand gelangt ist. Zusätzlich gilt oft, dass man den neuen Zustand berechnen kann durch die Multiplikation von $\vec{x}_t$ mit einer Matrix $A$, d. h. $\vec{x}_{t+1} = A \cdot \vec{x}_t$. Für ein konkretes Beispiel schauen Sie in die Aufgabe 2. Über die Laufzeit des Systems ergibt sich deshalb $\vec{x}_t = A^t \cdot \vec{x}_0$, wobei $\vec{x}_0$ den Startzustand bezeichnet. Es ist also nötig, schnell Potenzen von $A$ zu berechnen, und das wollen wir in Aufgabe 1 tun.

**AUFGABE 1:**
Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Ziel ist es, nur mit dem Taschenrechner bewaffnet, $A^{15}$ und $A^{22}$ zu berechnen.

(a) Berechnen Sie die beiden Eigenwerte $\lambda_1$ und $\lambda_2$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$, von $A$.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert $\lambda_i$ einen zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}_i$.

(c) Sei $P$ die Matrix, deren erste Spalte aus $\vec{v}_1$ und deren zweite Spalte aus $\vec{v}_2$ besteht. Berechnen Sie $P^{-1}$.

(d) Zeigen Sie: $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$. Dabei ist $\Lambda$ die Diagonalmatrix $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(e) Berechnen Sie die vier *Einträge* von $A^k$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und daraus $A^{15}$ und $A^{22}$.

**AUFGABE 2:**
Gegeben sei ein Ring aus Metall. Auf diesem Ring sind vier gleichmäßig verteilte Punkte $1, 2, 3, 4$ markiert, und der Punkt 1 wird durch eine Flamme auf die Temperatur $T$ erhitzt. Dann wird die Flamme entfernt, und wir betrachten, wie sich (etwas idealisiert) die Temperatur auf dem Ring verändert. Dazu modellieren wir die Temperaturänderungen wie folgt: Jeder Punkt gibt zwischen zwei Meßzeitpunkten je $\frac{1}{3}$ seiner Temperatur an seine beiden Nachbarn, das restliche Drittel bleibt

an diesem Punkt. Es wird keine Energie nach außen abgegeben. Dieser Prozeß der Temperaturänderungen fällt unter den Begriff der *(diskreten) Diffusion*.

Bezeichne $\vec{\vartheta}_t$ die Temperaturverteilung auf den vier Punkten. Zu Beginn ist also $\vec{\vartheta}_0 = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum nächsten Meßzeitpunkt ist

$$\vec{\vartheta}_1 = \overbrace{\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{=:A} \cdot \vec{\vartheta}_0$$

und allgemein $\vec{\vartheta}_t = A^t \cdot \vec{\vartheta}_0$. (Erklären Sie bitte, woher die Matrix $A$ kommt!)
Ähnlich wie in Aufgabe 1 kann man $A$ zerlegen:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=\Lambda} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{=P^{-1}}$$

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} \vec{\vartheta}_t$.

(b) Diskutieren Sie den Einfluß von $\Lambda_{44} = -\frac{1}{3}$ auf den Verlauf der Temperaturen in Richtung des Grenzwertes.

**AUFGABE 3:**

(a) Nennen Sie weitere „Organische Systeme“ und diskutieren Sie deren self-$*$-Eigenschaften.

(b) Definieren Sie in eigenen Worten *Emergenz* und diskutieren Sie diese Definition mit Ihren Kolleginnen und Kollegen.

**AUFGABE 4:**

Die Fibonacci-Zahlen sind eine in der Informatik in vielerlei Hinsicht gern gewählte Zahlenfolge. Sie sind wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_{i+1} &= f_i + f_{i-1} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine $(2 \times 2)$-Matrix $A$, so daß

$$\begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_i \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{pmatrix}$$

ist und gehen Sie dann analog zu Aufgabe 1 vor, um $f_i$ als explizite Formel darzustellen.