

Übungen zur Vorlesung
Organic Computing
SS 2018
Blatt 1

**Diese Übungen finden am 18. April als Tafel-Übung statt: um 08:15 Uhr in Raum 00.151-113, um 16:15 Uhr in Raum 02.134-113.
Ggf. bitte auf diesbezügliche Emails achten.**

Dynamische Systeme arbeiten häufig „gedächtnislos“, d. h. der Nachfolgezustand \vec{x}_{t+1} des Systems hängt nur vom aktuellen Zustand \vec{x}_t des Systems ab, und nicht zusätzlich davon, wie man in diesen Zustand gelangt ist. Zusätzlich gilt oft, dass man den neuen Zustand berechnen kann durch die Multiplikation von \vec{x}_t mit einer Matrix A , d. h. $\vec{x}_{t+1} = A \cdot \vec{x}_t$. Für ein konkretes Beispiel schauen Sie in die Aufgabe 2. Über die Laufzeit des Systems ergibt sich deshalb $\vec{x}_t = A^t \cdot \vec{x}_0$, wobei \vec{x}_0 den Startzustand bezeichnet. Es ist also nötig, schnell Potenzen von A zu berechnen, und das wollen wir in Aufgabe 1 tun.

AUFGABE 1:

Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Ziel ist es, nur mit dem Taschenrechner bewaffnet, A^{15} und A^{22} zu berechnen.

- Berechnen Sie die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 , $\lambda_1 \geq \lambda_2$, von A .
- Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert λ_i einen zugehörigen Eigenvektor \vec{v}_i .
- Sei P die Matrix, deren erste Spalte aus \vec{v}_1 und deren zweite Spalte aus \vec{v}_2 besteht. Berechnen Sie P^{-1} .
- Zeigen Sie: $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$. Dabei ist Λ die Diagonalmatrix $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
- Berechnen Sie die vier *Einträge* von A^k für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und daraus A^{15} und A^{22} .

AUFGABE 2:

Gegeben sei ein Ring aus Metall. Auf diesem Ring sind vier gleichmäßig verteilte Punkte 1, 2, 3, 4 markiert, und der Punkt 1 wird durch eine Flamme auf die Temperatur T erhitzt. Dann wird die Flamme entfernt, und wir betrachten, wie sich (etwas idealisiert) die Temperatur auf dem Ring verändert. Dazu modellieren wir die Temperaturänderungen wie folgt: Jeder Punkt gibt zwischen zwei Meßzeitpunkten je $\frac{1}{3}$ seiner Temperatur an seine beiden Nachbarn, das restliche Drittel bleibt an diesem Punkt. Es wird keine Energie nach außen abgegeben. Dieser Prozeß der Temperaturänderungen fällt unter den Begriff der (*diskreten*) *Diffusion*.

Bezeichne $\vec{\vartheta}_t$ die Temperaturverteilung auf den vier Punkten. Zu Beginn ist also $\vec{\vartheta}_0 = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum nächsten Meßzeitpunkt ist

$$\vec{\vartheta}_1 = \frac{1}{3} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{=:A} \cdot \vec{\vartheta}_0$$

und allgemein $\vec{\vartheta}_t = A^t \cdot \vec{\vartheta}_0$. (Erklären Sie bitte, woher die Matrix A kommt!)

Ähnlich wie in Aufgabe 1 kann man A zerlegen:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{=P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}{=\Lambda} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}{=P^{-1}}$$

(a) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\vartheta}_t$.

(b) Diskutieren Sie den Einfluß von $\Lambda_{44} = -\frac{1}{3}$ auf den Verlauf der Temperaturen in Richtung des Grenzwertes.

AUFGABE 3:

- (a) Nennen Sie weitere „Organische Systeme“ und diskutieren Sie deren self-*-Eigenschaften.
- (b) Definieren Sie in eigenen Worten *Emergenz* und diskutieren Sie diese Definition mit Ihren Kolleginnen und Kollegen.

AUFGABE 4:

Die Fibonacci-Zahlen sind eine in der Informatik in vielerlei Hinsicht gern gewählte Zahlenfolge. Sie sind wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_{i+1} &= f_i + f_{i-1} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine (2×2) -Matrix A , so daß

$$\begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_i \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{pmatrix}$$

ist und gehen Sie dann analog zu Aufgabe 1 vor, um f_i als explizite Formel darzustellen.