Rolf Wanka Erlangen, 31. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung

Effiziente kombinatorische Algorithmen

WS 2019/20

Blatt 14

AUFGABE 29:
Gegeben seien n Matrizen $M_1, \ldots, M_n$. Matrix M_i habe r_{i-1} Zeilen und r_i Spalten, $i \in \{1, \ldots n\}$. Das Ziel ist es, das Produkt

$$\prod_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cdot \ldots \cdot M_n$$

dieser Matrizen mit möglichst wenigen Zahlen-Multiplikationen zu berechnen.

Die Berechnung der $(r_{i-1} \times r_{i+1})$-Matrix $M_i \cdot M_{i+1}$ mit der Schulmethode benötigt $r_{i-1} \cdot r_i \cdot r_{i+1}$ Zahlen-Multiplikationen. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Anzahl der ausgeführten Zahlen-Multiplikationen sehr stark von der Klammerung des Produkts abhängt.

Mit $n = 4$, $r_0 = 10$, $r_1 = 1$, $r_2 = 50$, $r_3 = 20$ und $r_4 = 20$ benötigt man für $(M_1 \cdot M_2) \cdot (M_3 \cdot M_4)$ insgesamt 30 500 Zahlen-Multiplikationen, während die Klammerung $((M_1 \cdot M_2) \cdot M_3) \cdot M_4$ nur 5020 Zahlen-Multiplikationen benötigt.

Bezeichne m_{ij} die *minimale* Anzahl an Zahlen-Multiplikationen zur Berechnung von $M_i \cdot \ldots \cdot M_j$.

(a) Stellen Sie eine rekursive Beziehung für m_{ij} auf.

(b) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der die rekursive Beziehung aus (a) benutzt, um eine optimale Klammerungssequenz zu finden, und geben Sie seine Laufzeit an.

(c) Führen Sie Ihren Algorithmus auf dem oben dargestellten Beispiel aus.

AUFGABE 30:
Beim NP-vollständigen Entscheidungsproblem SUBSETSUM ist eine Folge $\bar{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ von natürlichen Zahlen und eine einzelne natürliche Zahl S gegeben. Gesucht ist eine Indexmenge U, $U \subseteq \{1, \ldots, n\}$, so daß $\sum_{i \in U} a_i = S$ gilt.

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der SUBSETSUM in Zeit $O(n \cdot S)$ löst. Verwandeln Sie Ihren Entscheidungsalgorithmus in einen Algorithmus, der U berechnet, falls es diese Menge gibt.

Übersetzen Sie Ihr Ergebnis in der Terminologie der parametrisierten Komplexität.

Hinweis: Betrachten Sie einen Algorithmus, der dynamische Programmierung benutzt, um die folgende Funktion $f(i, g)$ zu berechnen: $f(i, g) = 1$, wenn es eine Menge $W \subseteq \{a_1, \ldots, a_i\}$ gibt mit $s(W) = g$. Sonst ist $f(i, g) = 0$. Mit anderen Worten: Geben Sie eine rekursive Beziehung für $f(i, g)$ an.