Rolf Wanka Erlangen, 24. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung
Effiziente kombinatorische Algorithmen
WS 2019/20
Blatt 13

AUFGABE 26:

Wenden Sie den Algorithmus SOLVE2SAT auf die folgenden Booleschen Formeln in Konjunktiver Normalform an:

(a) $\Phi_1 = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_1)$

(b) $\Phi_2 = x_1 \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2)$

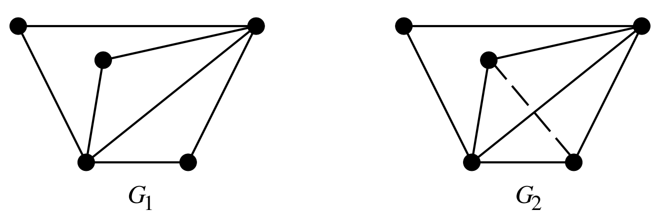
AUFGABE 27:

Beim Entscheidungsproblem MAX-SAT sind eine Boolesche Formel Φ in Konjunktiver Normalform über n Variablen und m Klauseln gegeben und eine Zahl k'. Das Ziel ist es, die Frage zu beantworten, ob es eine Belegung der Variablen gibt, so daß mindestens k' Klauseln erfüllt sind. Mit $k' = m$ ergibt sich SAT. Bei der Variante MAX-2SAT besteht zudem jede Klausel von Φ aus höchstens zwei Literalen.

Sei $(G = (V,E), k)$ ein zusammenhängender Eingabegraph für das Knotenüberdeckungsproblem VC, in der jeder Knoten mindestens den Grad 2 und mindestens ein Knoten Grad ≥ 3 hat. Die Knotenmenge sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
Führen Sie für jeden Knoten v_i eine Boolesche Variable x_i ein und betrachten Sie

$$\Phi_G = \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bar{x}_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{\{v_i, v_j\} \in E} (x_i \vee x_j) \right) .$$

(a) Führen Sie die Konstruktion von Φ_{G_1} und Φ_{G_2} für die folgenden Graphen G_1 und G_2 durch.



(b) Konstruieren Sie (nun im allgemeinen) zu einer beliebigen Knotenüberdeckung C eine Variablenbelegung, die in Φ_G *alle* Klauseln der Länge 2 und möglichst viele der Klauseln der Länge 1 erfüllt. Wieviele Klauseln k'_G sind erfüllt?

(c) Sei k'_G die Anzahl aus (b), und sei nun eine beliebige Belegung $(x_1, \ldots, x_n)$ der Booleschen Variablen gegeben, so daß k'_G viele Klauseln erfüllt sind. Dabei sollen allerdings nicht alle der Klauseln der Länge 2 erfült sein. Konstruieren Sie aus der Belegung eine weitere Belegung, die nun wieder alle Klauseln der Länge 2 und insgesamt noch immer mindestens k'_G Klauseln erfült.

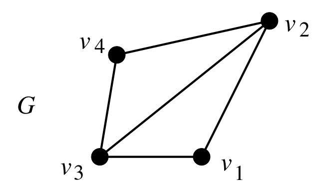
(d) Was wissen Sie mit (b) und (c) komplexitätstheoretisch über MAX-2SAT ?

AUFGABE 28:

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$, und es geht noch einmal um das Problem 3COL, bei dem entschieden werden soll, ob die Knoten von G mit drei Farben gefärbt werden können (vgl. Aufgabe 25).
Wir haben erneut die drei Farben $\{1, 2, 3\}$.

(a) Nehmen Sie an, für jeden Knoten $v_i \in V$ ist (von außen!) eine Farbe $\text{tabu}[i] \in \{1, 2, 3\}$ festgelegt worden, mit der v_i *nicht* gefärbt werden darf. Wir nennen $\text{tabu}[i]$ *Tabu-Farbe* für v_i.

Sei $\text{tabu} = (2, 1, 2, 3)$ eine Folge von Tabu-Farben für den folgenden Graphen:



Beschreiben Sie zu G und tabu eine k-KNF $\Phi_{G,\text{tabu}}$, die genau dann erfüllbar ist, wenn der Graph unter Berücksichtigung der Tabu-Farben korrekt mit drei Farben gefärbt werden kann. Welches k erreichen Sie?

Zur Erinnerung: In BFS hatten wir die nützliche KNF:

$$\text{GENAUEINEVARISTTRUE}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee \cdots \vee x_n) \wedge \bigwedge_{i \neq j} (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j)$$

(b) Betrachten Sie den folgenden *zufallsgesteuerten* Algorithmus für das Dreifärbbarkeitsproblem 3COL.

ALGORITHMUS RAND3COL$(G = (V, E))$

(1) **for all** $v_i \in V$ **do** rate unabhängig und gleichverteilt $\text{tabu}[i] \in \{1, 2, 3\}$;
(2) konstruiere die KNF $\Phi_{G,\text{tabu}}$;
(3) teste, ob $\Phi_{G,\text{tabu}}$ erfüllbar ist;
(4) gib die Antwort von (3) aus.

Angenommen, G ist 3-färbbar.

(i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in (1) eine Tabu-Farbe erraten wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle geratenen Farben Tabu-Farben sind?

(ii) Wiederholen Sie RAND3COL(G) solange, bis die Antwort JA lautet. Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Wiederholungen.

(iii) Wie ergibt sich aus dann die Laufzeit für den „Wiederholungsalgorithmus"?