

Übungen zur Vorlesung
Effiziente kombinatorische Algorithmen
 WS 2018/19
 Blatt 10

AUFGABE 25:

Seien $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ zwei 0-1-Folgen. Der *Hamming-Abstand* zwischen \bar{a} und \bar{b} ist $h(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$, d.h. die Anzahl der Stellen, an denen sich \bar{a} und \bar{b} unterscheiden. Die *Hamming-Kugel* mit Radius d um \bar{a} ist $\mathcal{H}(\bar{a}, d) = \{\bar{b} \mid h(\bar{a}, \bar{b}) \leq d\}$.

Sei Φ eine 3-KNF über den Variablen $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, und sei $\bar{a} : V \rightarrow \{0, 1\}$ eine Belegung der Variablen, wobei 0 die Bedeutung FALSE und 1 die Bedeutung TRUE hat.

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus

```

function LOCAL_SEARCH( $\bar{a}, d$ ): {FALSE, TRUE}
  begin
    if  $\bar{a}$  erfüllt  $\Phi$  then return TRUE;
    if  $d = 0$  then return FALSE;
    sei  $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$  eine Klausel, die von  $\bar{a}$  nicht erfüllt wird;
    für  $i \in \{1, 2, 3\}$  sei  $\bar{a}'_i$  die Belegung, in der in  $\bar{a}$  die Variable von  $\ell_i$  invertiert wird;
    return
      LOCAL_SEARCH( $\bar{a}'_1, d - 1$ )  $\vee$  LOCAL_SEARCH( $\bar{a}'_2, d - 1$ )  $\vee$  LOCAL_SEARCH( $\bar{a}'_3, d - 1$ );
  end

```

- (a) Zeigen Sie: Wenn Sie mit einer beliebigen Variablen-Belegung \bar{a} starten, dann durchmustert LOCAL_SEARCH(\bar{a}, d) den Hamming-Ball $\mathcal{H}(\bar{a}, d)$ und gibt genau dann TRUE aus, falls es in $\mathcal{H}(\bar{a}, d)$ eine erfüllende Belegung gibt.
- (b) Geben Sie die Laufzeit in O^* -Notation an.
- (c) Sei $\bar{a}_0 = (0, \dots, 0)$ und $\bar{a}_1 = (1, \dots, 1)$. Wie müssen Sie d setzen, so daß LOCAL_SEARCH(\bar{a}_0, d) \vee LOCAL_SEARCH(\bar{a}_1, d) die korrekte Antwort auf die Frage „ $\Phi \in 3\text{-SAT?}$ “ ist.

Welche Laufzeit ergibt sich damit zur Lösung von 3-SAT? Und wenn Sie diesen Ansatz für 4-SAT wiederholen?

AUFGABE 26:

LOCAL_SEARCH(\bar{a}, d) aus Aufgabe 25 wollen wir nun nutzen, um einen sehr einfachen randomisierten Algorithmus für 3-SAT anzugeben und zu analysieren. Sei dazu erneut eine 3-KNF Φ über den Variablen $\{x_1, \dots, x_n\}$ gegeben, und sei $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$ ein noch zu bestimmender Faktor.

Algorithmus GANZEINFACH δ

```

rate eine Belegung  $\bar{a} \in \{0, 1\}^n$ ;
gib LOCAL_SEARCH( $\bar{a}, \delta n$ ) aus.

```

Nehmen Sie an, daß $\Phi \in 3\text{-SAT}$ ist.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß $\text{GANZEINFACH}_\delta$ die korrekte Antwort findet, mindestens?

Hinweis: Wieviele Belegungen gibt es? Und wieviele liegen in der Hamming-Kugel $\mathcal{H}(\bar{a}, \delta n)$? Nutzen Sie zum Abschätzen folgende Beziehung:

$$\sum_{i=0}^{\delta n} \binom{n}{i} \geq \binom{n}{\delta n} \geq \frac{1}{n+1} \cdot \left[\left(\frac{1}{\delta} \right)^\delta \cdot \left(\frac{1}{1-\delta} \right)^{1-\delta} \right]^n$$

- (b) Dieser Algorithmus soll nun solange wiederholt werden, bis er eine erfüllende Belegung findet.

Was ist der Erwartungswert $E[t(n)]$ für die Anzahl der Wiederholungen und damit der Erwartungswert $E[T(n)]$ für die Laufzeit des Wiederholungsalgorithmus (hier brauchen Sie noch die Laufzeit von $\text{LOCAL_SEARCH}(\bar{a}, \delta n)$ aus Aufgabe 25)?

- (c) Bestimmen Sie mit einem Computer-Algebra-System δ so, daß $E[T(n)]$ minimal ist. Was ergibt sich als Laufzeit in O^* -Notation.