Rolf Wanka Erlangen, 10. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung
Effiziente kombinatorische Algorithmen
WS 2019/20
Blatt 10

AUFGABE 23:
Seien $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ zwei 0-1-Folgen. Der *Hamming-Abstand* zwischen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ ist $h(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$, d. h. die Anzahl der Stellen, an denen sich $\bar{a}$ und $\bar{b}$ unterscheiden. Die *Hamming-Kugel* mit Radius d um $\bar{a}$ ist $\mathcal{H}(\bar{a}, d) = \{\bar{b} \mid h(\bar{a}, \bar{b}) \leq d\}$.

Sei Φ eine 3-KNF über den Variablen $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$, und sei $\bar{a} : V \to \{0, 1\}$ eine Belegung der Variablen, wobei 0 die Bedeutung FALSE und 1 die Bedeutung TRUE hat.

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus

function LOCAL_SEARCH($\bar{a}$, d): $\{$FALSE, TRUE$\}$
begin
  if $\bar{a}$ erfüllt Φ **then return** TRUE;
  if $d = 0$ **then return** FALSE;
  sei $C = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$ eine Klausel, die von $\bar{a}$ nicht erfüllt wird;
  für $i \in \{1, 2, 3\}$ sei $\bar{a}'_i$ die Belegung, in der in $\bar{a}$ die Variable von ℓ_i invertiert wird;
  return
    LOCAL_SEARCH($\bar{a}'_1, d-1$) $\vee$ LOCAL_SEARCH($\bar{a}'_2, d-1$) $\vee$ LOCAL_SEARCH($\bar{a}'_3, d-1$);
end

(a) Zeigen Sie: Wenn Sie mit einer beliebigen Variablen-Belegung $\bar{a}$ starten, dann durchmustert LOCAL_SEARCH($\bar{a}$, d) den Hamming-Ball $\mathcal{H}(\bar{a}, d)$ und gibt genau dann TRUE aus, falls es in $\mathcal{H}(\bar{a}, d)$ eine erfüllende Belegung gibt.

(b) Geben Sie die Laufzeit in O^*-Notation an.

(c) Sei $\bar{a}_0 = (0, \ldots, 0)$ und $\bar{a}_1 = (1, \ldots, 1)$. Wie müssen Sie d setzen, so daß

$$\text{LOCAL\_SEARCH}(\bar{a}_0, d) \vee \text{LOCAL\_SEARCH}(\bar{a}_1, d)$$

die korrekte Antwort auf die Frage „$\Phi \in$ 3-SAT?“ ist.

Welche Laufzeit ergibt sich damit zur Lösung von 3-SAT? Und wenn Sie diesen Ansatz für 4-SAT wiederholen?

AUFGABE 24:
Local_Search$(\bar{a}, d)$ aus Aufgabe 23 wollen wir nun nutzen, um einen sehr einfachen randomisierten Algorithmus für 3-SAT anzugeben und zu analysieren. Sei dazu erneut eine 3-KNF Φ über den Variablen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ gegeben, und sei $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$ ein noch zu bestimmender Faktor.

> **Algorithmus** GanzEinfach$_\delta$
>
> rate eine Belegung $\bar{a} \in \{0,1\}^n$;
> gib Local_Search$(\bar{a}, \delta n)$ aus.

Nehmen Sie an, daß $\Phi \in$ 3-SAT ist.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß GanzEinfach$_\delta$ die korrekte Antwort findet, mindestens?

Hinweis: Wieviele Belegungen gibt es? Und wieviele liegen in der Hamming-Kugel $\mathcal{H}(\bar{a}, \delta n)$? Nutzen Sie zum Abschätzen folgende Beziehung:

$$\sum_{i=0}^{\delta n} \binom{n}{i} \geq \binom{n}{\delta n} \geq \frac{1}{n+1} \cdot \left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{1-\delta} \right]^n$$

(b) Dieser Algorithmus soll nun solange wiederholt werden, bis er eine erfüllende Belegung findet.

Was ist der Erwartungswert $E[t(n)]$ für die Anzahl der Wiederholungen und damit der Erwartungswert $E[T(n)]$ für die Laufzeit des Wiederholungsalgorithmus (hier brauchen Sie noch die Laufzeit von Local_Search$(\bar{a}, \delta n)$ aus Aufgabe 23)?

(c) Bestimmen Sie mit einem Computer-Algebra-System δ so, daß $E[T(n)]$ minimal ist. Was ergibt sich als Laufzeit in O^*-Notation.