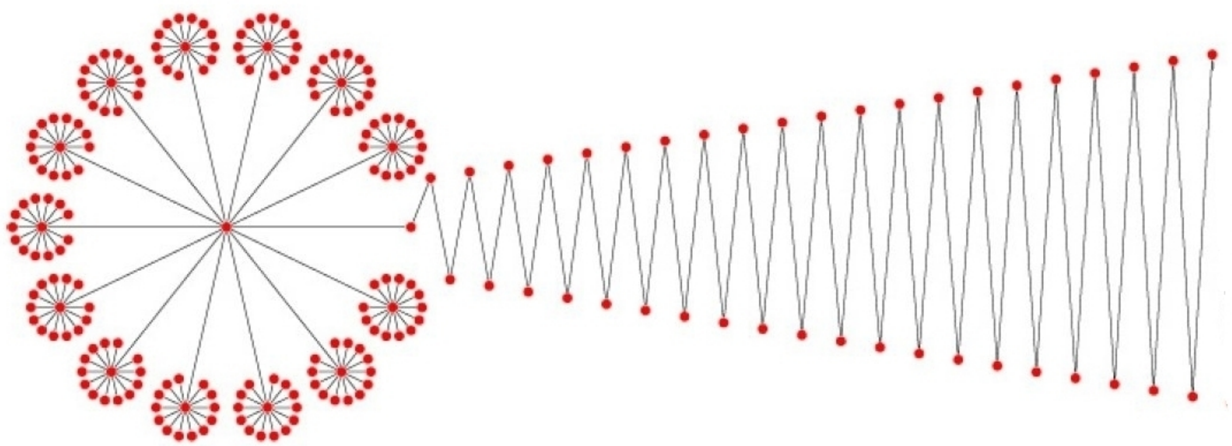
Rolf Wanka

Erlangen, 16. Januar 2019

Übungen zur Vorlesung
Effiziente kombinatorische Algorithmen
WS 2018/19
Blatt 9

AUFGABE 23:
Der folgende Graph ist der 15-Komet Q_{15}.



Für $k \geq 2$ besteht der k-Komet Q_k aus

$$n = \underbrace{(k-1)(k-2)+1}_{\text{Kopf}} + \underbrace{3(k-1)}_{\text{Schweif}} = k^2$$

Knoten.

(a) Welchen Grad und wieviele Kanten in Abhängigkeit von k hat Q_k ? Aus wievielen Knoten besteht eine kleinste Knotenüberdeckung?

Hinweis: Die Frage nach der Anzahl der Kanten ist sehr einfach zu beantworten, wenn Sie sich klarmachen, zu welcher Familie von Graphen Q_k gehört.

(b) Wie verhält sich der Algorithmus von Buss/Goldsmith, wenn er mit (Q_k, k) gestartet wird?

(c) Wie verhält sich der Algorithmus D&C-VC aus Aufgabe 21 von Blatt 8, wenn er mit (Q_k, k) gestartet wird?

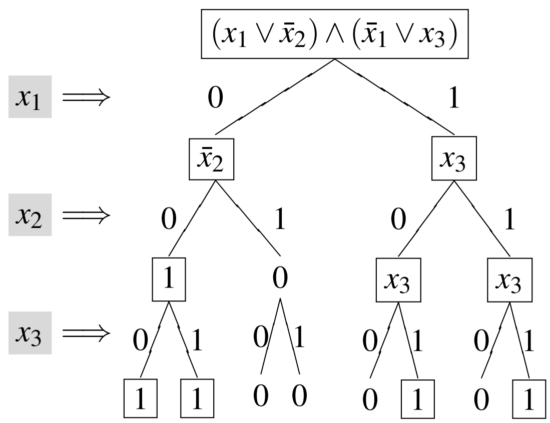
(d) Modifizieren Sie D&C-VC mit Ihrem Wissen über den Grad eines Graphen bei der Entscheidung, ob $(G, k) \in \text{VC}$ ist. Was passiert nun?

(e) Wie verhält sich der exakte allgemeine Algorithmus MVC, wenn er mit Q_k gestartet wird?

AUFGABE 24:
In dieser Aufgabe entwickeln wir einen ersten deterministischen Algorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem SAT, oder genauer, für seine Variante k-SAT, dessen Laufzeit „besser“ als 2^n ist. Mathematisch korrekt muß es heißen: Seine Laufzeit ist $o(2^n)$.

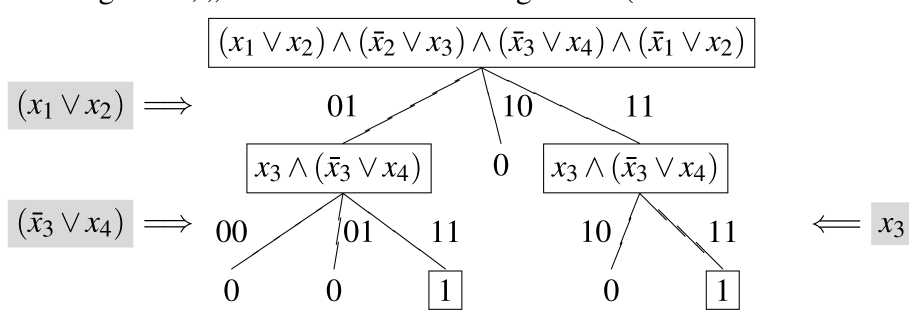
Sei also Φ eine Boolesche Formel in Konjunktiver Normalform über den n Variablen $\{x_1, \ldots, x_n\}$, in der jede der m Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ aus höchstens k Literalen besteht. Wenn Sie eine konkrete Belegung der Variablen haben, dann kann Φ in Zeit $O(n + k \cdot m)$ ausgewertet werden.

Den Algorithmus, der alle möglichen Belegungen durchprobiert, kann man mit Hilfe eines sog. Berechnungsbaums darstellen. Im folgenden Beispiel ist eine KNF $\Phi = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3)$ für 2SAT und der zugehörige Berechnungsbaum angegeben. Ein Kasten bedeutet, daß die Formel in ihm erfüllbar ist.



Die Laufzeit des Verfahrens ist im ungünstigsten Fall, wenn der gesamte Baum durchprobiert werden muß, $O((n + k \cdot m) \cdot 2^n) = O^*(2^n)$.

Betrachten Sie nun den folgenden, „schlaueren“ Berechnungsbaum (für eine andere Formel).



Hier wird an einem *Knoten* eine Klausel C genommen und die eine Belegung der (Teil-)Länge k, die C nicht erfüllt, von der Betrachtung ausgeschlossen, da diese (Teil-)Belegung nicht Teil einer erfüllenden Belegung sein kann. Enthält C weniger als k Literale, so werden die zu belegenden Variablen durch noch unbelegte Variablen „aufgefüllt“.

(a) Beschreiben Sie den Algorithmus konkret.

(b) Wieviele Level hat der Berechnungsbaum im Worst Case, wenn man mit einer Formel mit je k Literalen je Klausel beginnt?

(c) Wie ist die Laufzeit des Algorithmus im Worst Case in Abhängigkeit von m, n und k? Was kommt z. B. für $k = 3$ konkret heraus?

Hinweis: Geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{t} a^i = \frac{a^{t+1} - 1}{a - 1} = \Theta(a^t)$