Rolf Wanka Erlangen, 9. Januar 2019

Übungen zur Vorlesung

Effiziente kombinatorische Algorithmen

WS 2018/19

Blatt 8

AUFGABE 21:
Sei $G = (V,E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge U von V heißt *Knotenüberdeckung*, wenn für jede Kante $\{u,v\} \in E$ gilt: $\{u,v\} \cap U \neq \emptyset$.

Sei $\mathrm{VC} = \{(G,k) \mid G = (V,E)$ ist ungerichteter Graph, der eine Knotenüberdeckung aus höchstens k Knoten besitzt$\}$.

Betrachten Sie den folgenden Divide-and-Conquer-Algorithmus, der genau dann true ausgibt, wenn $(G,k) \in \mathrm{VC}$ ist:

ALGORITHMUS D&C-VC(G,k)

if $k = 1$
  then
    gib die richtige Antwort aus
  else
    wähle eine beliebige Kante $\{u,v\} \in E$;
    sei G_1 der Graph, der entsteht, wenn in G der Knoten u und die zu u inzidenten Kanten gelöscht werden;
    sei G_2 der Graph, der entsteht, wenn in G der Knoten v und die zu v inzidenten Kanten gelöscht werden;
    gib $\Big($D&C-VC$(G_1, k-1)$ **or** D&C-VC$(G_2, k-1)\Big)$ aus
  end_else

Begründen Sie seine Korrektheit und bestimmen Sie seine Laufzeit in Abhängigkeit von $|V|$, $|E|$ und k.

***O**-Notation**. Seien f und g zwei Funktionen. Wir schreiben $f(n) = O^*(g(n))$, falls für ein festes Polynom $\mathrm{poly}(n)$ gilt: $f(n) = O(g(n) \cdot \mathrm{poly}(n))$. Also ist z. B. $c \cdot 2^n \cdot n^2 = O^*(2^n)$.

AUFGABE 22:
Die Eingabe sei ein beliebiger Graph $G = (V,E)$. Die Aufgabe besteht darin, zu entscheiden, ob die Knoten aus V mit den drei Farben $\{1,2,3\}$ (korrekt) gefärbt werden können (vgl. Aufgabe 6 auf Blatt 2). Im folgenden setzen wir $n = |V|$ und $m = |E|$.

In der Vorlesung „Berechenbarkeit und Formale Sprachen" hieß dieses Problem 3COL. Dort wurde gezeigt, daß es sich bei 3COL um ein NP-vollständiges Problem handelt.

Dagegen kann mit Tiefensuche in linearer Zeit, d. h. in Zeit $O(n+m) = O^*(1)$ entschieden werden, ob 2 Farben ausreichen. Also ist 2COL $\in$ P.

Die brute-force-Methode, die alle möglichen 3-Färbungen ausprobiert, hat Laufzeit $T_{\mathrm{bf}} = O^*(3^n)$. Das ist leicht einzusehen, da eine (möglicherweise nicht korrekte) Färbung c eine totale Abbildung $c : V \to \{1,2,3\}$ ist, und davon gibt es 3^n viele.

(a) Nehmen Sie an, G ist 3-färbbar, und sei V_i die Menge aller Knoten mit der Farbe i, $i \in \{1,2,3\}$. Die V_i heißen auch Farbklassen.

  (i) Kann es in E Kanten zwischen zwei Knoten $u, v \in V_i$ geben?

  (ii) Geben Sie in Abhängigkeit von n eine möglichst kleine obere Schranke s_n für die Kardinalität der kleinsten Farbklasse an, also: $\min\{|V_1|,|V_2|,|V_3|\} \leq s_n$

(b) Nutzen Sie (i) und (ii) und die Tatsache, daß 2Col in Polynomzeit lösbar ist, um einen Algorithmus ColElegant anzugeben, der 3Col entscheidet.

(c) Analysieren Sie die Laufzeit von ColElegant. Nutzen Sie dabei die nützliche Beziehung mit $\delta \leq \frac{1}{2}$:

$$\sum_{i=0}^{\delta n} \binom{n}{i} \leq \left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{1-\delta} \right]^n$$

Ich wünsche Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch und ein schönes und erfolgreiches neues Jahr 2018! Ihr Rolf Wanka