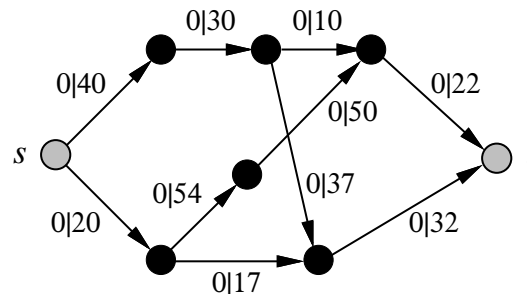


Übungen zur Vorlesung  
**Effiziente kombinatorische Algorithmen**  
 WS 2019/20  
 Blatt 8

**AUFGABE 18:**

Gegeben sei das folgende Netzwerk  $N$  mit dem aktuell leeren Fluß.



Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Dinic einen maximalen Fluß auf  $N$ .

**AUFGABE 19:**

Sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  gegeben. Ziel ist es, nur mit dem Taschenrechner bewaffnet,  $A^{15}$  und  $A^{22}$  zu berechnen.

- Berechnen Sie die beiden Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , von  $A$ .
- Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert  $\lambda_i$  einen zugehörigen Eigenvektor  $\vec{v}_i$ .
- Sei  $P$  die Matrix, deren erste Spalte aus  $\vec{v}_1$  und deren zweite Spalte aus  $\vec{v}_2$  besteht. Berechnen Sie  $P^{-1}$ .
- Zeigen Sie:  $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$ . Dabei ist  $\Lambda$  die Diagonalmatrix  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .
- Berechnen Sie die vier *Einträge* von  $A^k$  für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  und daraus  $A^{15}$  und  $A^{22}$ .

**AUFGABE 20:**

Die Fibonacci-Zahlen sind eine in der Informatik in vielerlei Hinsicht gern gewählte Zahlenfolge. Sie ist wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_{i+1} &= f_i + f_{i-1} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine  $(2 \times 2)$ -Matrix  $A$ , so daß

$$\begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_i \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{pmatrix}$$

ist und gehen Sie dann analog zu Aufgabe 19 vor, um  $f_i$  als explizite Formel darzustellen.