Rolf Wanka Erlangen, 28. November 2018

Übungen zur Vorlesung

Effiziente kombinatorische Algorithmen

WS 2018/19

Blatt 6

AUFGABE 14:

Sei $N = (G, s, t, c)$ ein Netzwerk, und sei f ein Fluß auf N. Der Satz von FORD/FULKERSON besagt:

$$f \text{ ist ein maximaler Fluß auf } N \iff \text{In } N \text{ gibt es keinen erweiternden Weg bzgl. } f$$

Daraus kann man das folgende „algorithmische Schema“ ableiten: Suche solange einen erweiternden Weg und verbessere mit ihm den Fluß, bis es keinen erweiternden Weg mehr gibt. Der dann vorhandene Fluß ist maximal.

Wir hatten an einem kleinen Beispiel gesehen, daß dieser Ansatz zu exponentieller Laufzeit führen kann. In diesem Beispiel waren alle Kapazitäten natürliche Zahlen.

In der Vorlesung wurde die Kapazitätsfunktion c ja sogar als $c : E \to \mathbb{R}^+$ definiert, d. h. als Bildbereich sind die positiven reellen Zahlen erlaubt. Wir zeigen nun, daß im Fall irrationaler Zahlen das algorithmische Schema sogar endlos laufen kann.

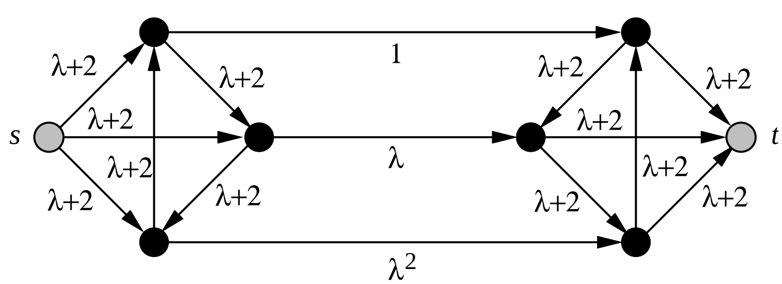
Sei $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \approx 0{,}618034$ die positive reelle Zahl mit $\lambda^2 + \lambda = 1$.

(a) Zeigen Sie die folgenden nützlichen Beziehungen:

(i) $\lambda + 2 = \dfrac{1}{1-\lambda} = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i$

(ii) $\lambda^{i+2} = \lambda^i - \lambda^{i+1}$

Gegeben sei nun das in der folgenden Abbildung dargestellte Netzwerk. An den Kanten stehen die Kapazitäten.



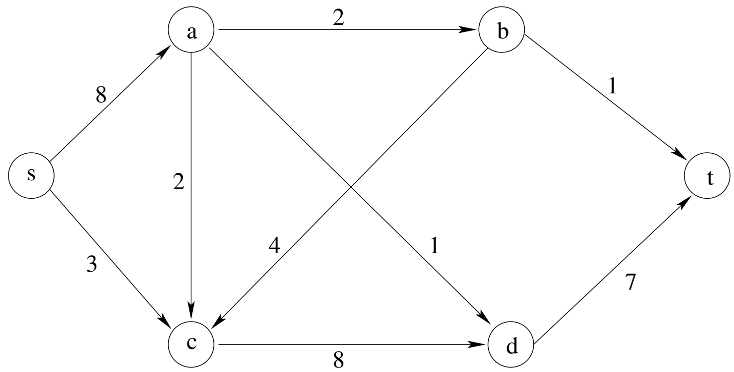
(b) Zeigen Sie, daß es einen Fluß f von s nach t mit $|f| = 2$ gibt, und daß dieser maximal ist.

(c) Zeigen Sie: Es gibt eine Folge von erweiternden Wegen P_i, $i \geq 0$, so daß die Werte der durch P_i bestimmten verbesserten Flüsse gegen 2 konvergieren, ohne daß der Wert 2 erreicht wird.

Hinweis: Wählen Sie P_0 so, daß von den drei mittleren waagrechten Kanten nur die obere verwendet wird. Die übrigen erweiternden Wege P_i werden nun so gewählt, daß sie jeweils *alle drei* mittleren waagrechten Kanten enthalten und den Fluß um jeweils λ^{i+1} erhöhen. Die Wege sind dabei natürlich nicht die naheliegenden kürzesten Wege. Ab P_1 ist immer eine der mittleren Kanten eine Rückwärtskante, während alle anderen Kanten Vorwärtskanten sind.

Zum Ausprobieren gibt es ein gesondertes Blatt mit dem Netzwerk.

AUFGABE 15:
Bestimmen Sie einen maximalen Fluss in folgendem Graphen und begründen Sie, warum er maximal ist. Konstruieren Sie solange erweiternde Wege, bis es keine mehr gibt.



Gibt es in diesem Graphen auch einen nicht-ganzzahligen maximalen Fluss?

AUFGABE 16:
Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Ziel ist es, nur mit dem Taschenrechner bewaffnet, A^{15} und A^{22} zu berechnen.

(a) Berechnen Sie die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2, $\lambda_1 \geq \lambda_2$, von A.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert λ_i einen zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}_i$.

(c) Sei P die Matrix, deren erste Spalte aus $\vec{v}_1$ und deren zweite Spalte aus $\vec{v}_2$ besteht. Berechnen Sie P^{-1}.

(d) Zeigen Sie: $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$. Dabei ist Λ die Diagonalmatrix $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

(e) Berechnen Sie die vier *Einträge* von A^k für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und daraus A^{15} und A^{22}.

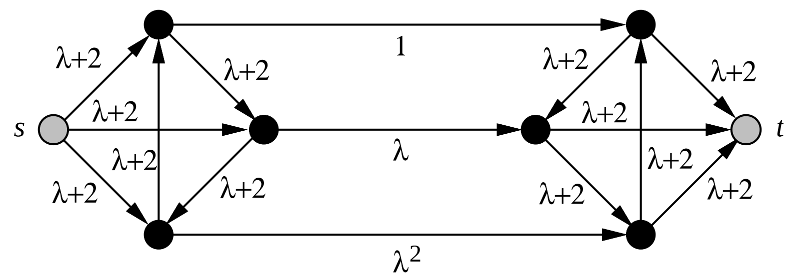
AUFGABE 17:
Die Fibonacci-Zahlen sind eine in der Informatik in vielerlei Hinsicht gern gewählte Zahlenfolge. Sie ist wie folgt rekursiv definiert:

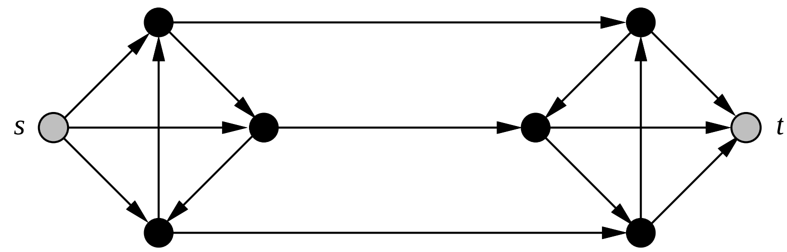
$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_{i+1} &= f_i + f_{i-1} \end{aligned}$$

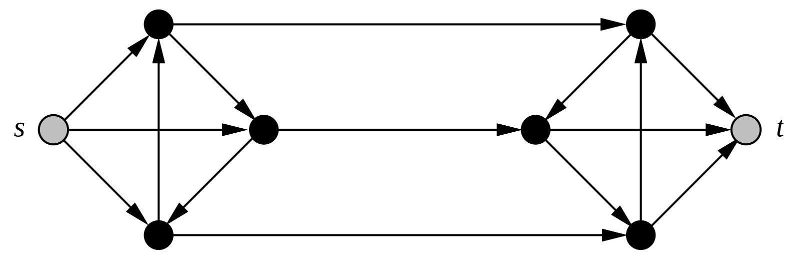
Bestimmen Sie eine (2×2)-Matrix A, so daß

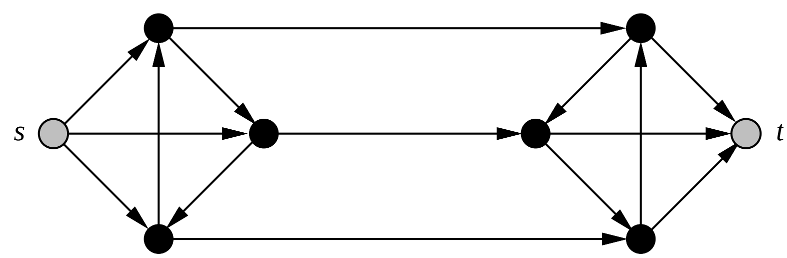
$$\begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_i \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{pmatrix}$$

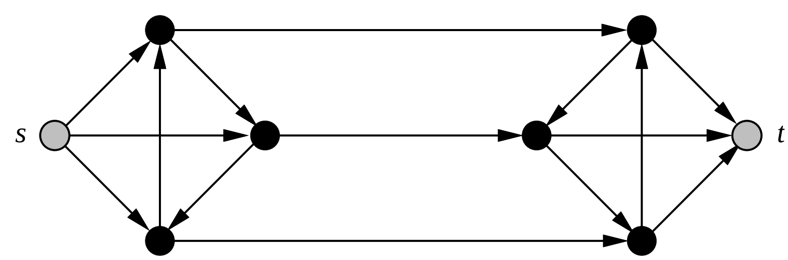
ist und gehen Sie dann analog zu Aufgabe 16 vor, um f_i als explizite Formel darzustellen.

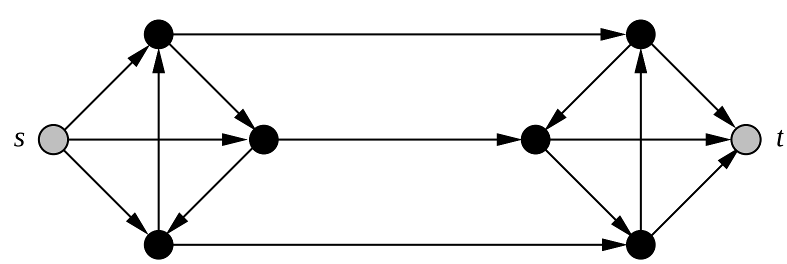

s
t
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
λ+2
1
λ
λ2


s
t


s
t


s
t


s
t


s
t