Rolf Wanka Erlangen, 31. Oktober 2018

Übungen zur Vorlesung

Effiziente kombinatorische Algorithmen

WS 2018/19

Blatt 2

LEONHARD EULER (* 15. April 1707 in Basel, † 18. September 1783 in Sankt Petersburg) ist einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten.

Sein 1736 veröffentlichter Aufsatz *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* beschäftigt sich mit dem *Königsberger Brückenproblem*, das wir in Aufgabe 5 lösen werden. Diese Veröffentlichung gilt als der Erfindungsaufsatz der Graphentheorie.

Zwei 1758 erschienene, bereits 1752 geschriebene Aufsätze enthalten den *Eulerschen Polyedersatz*, den wir in Aufgabe 8 beweisen und dazu nutzen werden, planare Graphen zu färben.

Viele weitere fundamentale Ergebnisse gehen ebenfalls auf Euler zurück, wie z. B. die Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und die wunderbare Beziehung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, die den Namen *Eulersche Identität* trägt, um nur noch ein paar kurz beschreibbare seiner Ergebnisse zu nennen.

Aber auch unser wissenschaftlicher Alltag wird durch Euler mitbestimmt. Die Schreibweise $f(x)$ für Funktionen geht ebenso auf sein Konto wie das Summenzeichen Σ und die Bezeichnungen π für die Kreiszahl und i für die imaginäre Einheit, um von e, der Euler-Zahl, ganz zu schweigen, die er wohl e nannte, weil er sie bei der Untersuchung der natürlichen Exponentialfunktion entdeckte.

AUFGABE 5:

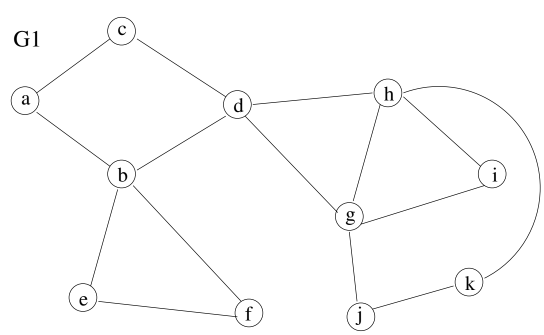
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph und $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Als *Eulerkreis* in G bezeichnet man einen Weg von v nach v, der jede Kante genau einmal benutzt.

(a) Zeigen Sie:
G hat einen Eulerkreis $\Rightarrow$ Jeder Knoten in G hat geraden Grad.

(b) Zeigen Sie:
Jeder Knoten in G hat geraden Grad $\Rightarrow$ G hat einen Eulerkreis.
Dies kann durch vollständige Induktion über die Zahl der Kanten gezeigt werden. Lösen Sie dazu folgende Teilaufgaben:

(i) Wie sieht der Induktionsanfang aus?

(ii) Betrachten Sie den Beispielgraphen G_1:

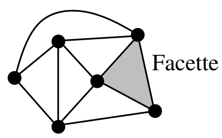


Bestimmen Sie einen Kreis in G_1 und entfernen Sie ihn. Welche Eigenschaft weist der Restgraph G_1' auf?

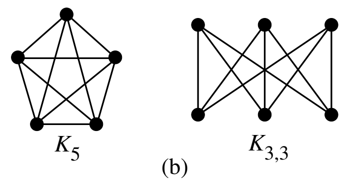
(iii) Wie kann nun in Zeit $O(|V|+|E|)$ ein Eulerkreis bestimmt werden? Geben Sie einen Algorithmus an und führen Sie ihn beispielhaft an G_1 aus.

AUFGABE 6:

Ein Graph heißt *planar*, wenn man ihn so in die Ebene einbetten kann, daß sich keine Kanten schneiden.



(a)



(b)

Der Graph in Abb. (a) ist z. B. planar. Eine leere Region, um die herum Kanten verlaufen, heißt dann Facette. In Abb. (a) ist eine Facette extra markiert. Die Region um den Graphen herum ist auch eine Facette.

Sei nun $G=(V,E)$ ein *beliebiger* zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten (vgl. Abb. (a): Der Graph hat 6 Knoten, 11 Kanten und 7 Facetten, inkl. der „Außen-Facette“).

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach f, daß gilt: $n-m+f=2$.

Anmerkung: Diese Aussage ist der berühmte *Eulersche Polyedersatz* (überlegen Sie sich, was planare Graphen mit Polyedern zu tun haben).

(b) Sei g die Länge eines kürzesten Kreises in G. Ist G kreisfrei, setzt man $g=\infty$. g heißt die *Taillenweite* (engl.: *girth*) von G.

Zeigen Sie: $m \leq \frac{g}{g-2}\cdot(n-2)$. Folgern Sie, daß $m \leq 3n-6$ ist.

Hinweise: (i) Behandeln Sie Brücken (siehe Blatt 2) gesondert. (ii) Sei f_i die Anzahl der Facetten in einem brückenlosen Graphen, die durch i Kanten begrenzt werden. Was ist $\sum_i i\cdot f_i$?

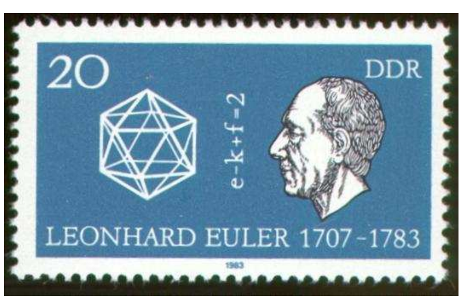
Nutzen Sie diese Eigenschaft planarer Graphen, um zu zeigen, daß K_5 und $K_{3,3}$ (vgl. Abb. (b)) nicht planar sind.

Anmerkung: Daß $m \leq 3n-6$ ist, ist eine für Algorithmen auf planaren Graphen sehr nützliche Eigenschaft, denn sie bedeutet, daß die Zahl der Kanten planarer Graphen linear in der Anzahl der Knoten ist!

(c) Zeigen Sie, daß G mindestens drei Knoten mit Grad 5 oder kleiner enthält.

(d) Eine Funktion $f: V \to \mathbb{N}$ heißt Knotenfärbung von G, falls für alle Kanten $\{u,v\}\in E$ gilt: $f(u)\neq f(v)$.

Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Knotenfärbung des planaren Graphen G aus höchstens 6 verschiedenen Farben berechnet.



Briefmarken der DDR zum 200. Todestag und der Schweiz zum 300. Geburtstag Eulers mit Darstellungen des Polyedersatzes.