Prof. Dr. Rolf Wanka
Bernd Bassimir, Alexander Raß, Jonas Schreiner,
Stefan Schwanecke, Jeanette Wohnig

Erlangen, 23. Oktober 2018

Übungen zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Formale Sprachen
WS 2018/2019
Blatt 0.5

Je mehr Plus-Zeichen $+$ bei einer Aufgabe, desto wichtiger ist sie, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

Die folgenden Aufgaben (Präsenzaufgaben) brauchen nicht abgegeben zu werden, sie werden direkt in den Übungen bearbeitet und besprochen.

AUFGABE 5:
[Präsenzaufgabe, $+++,\star$] Betrachten Sie die bereits in der Vorlesung vorgestellte deterministische 1-Band-Turingmaschine M (`https://www12.cs.fau.de/edu/BFS/common/TM.pdf`).

Führen Sie sie aus für die Eingaben $w_1 = 000111$ und $w_2 = 00101$. Benutzen Sie die Konfigurationsschreibweise, d. h. $q_0000111 \vdash 0q_000111 \vdash \cdots$

AUFGABE 6:
[Präsenzaufgabe, $+++,\star$] Denken Sie sich ein Modell dafür aus, was „Rechnen auf einem Blatt Papier“ ist. Definieren Sie den benutzbaren, **endlichen** Zeichenvorrat und Zeichenmanipulationen, um quadratische Gleichungen (ohne die bekannte Lösungsformel!) zu lösen, die die Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ haben. Also z. B.: $2 \cdot x^2 + 16 \cdot x + 14 = 0$. Sie haben lediglich ein weißes Blatt Papier, einen Bleistift und einen Radiergummi. Beschreiben Sie für Ihr Rechenmodell einen Algorithmus, der quadratische Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung löst.

AUFGABE 7:
[Präsenzaufgabe, $+++,\star\star\star$] Eine deterministische 1-Band-Turingmaschine heißt *Zähler*, falls sie, gestartet mit $\text{bin}(p)$, $p \in \mathbb{N}^{\neq 0}$, nacheinander $\text{bin}(p-1)$, $\text{bin}(p-2)$, ..., $\text{bin}(0)$ immer auf dem gleichen Bandbereich erzeugt und dann stoppt. Wenn also $p = 7$ ist, dann ist die Eingabe für den Zähler 111, und es sollen nacheinander die Wörter 110, 101, 100, 11, 10, 1, 0 erzeugt werden, und das immer auf demselben Platz. Beachten Sie, daß es keine führenden Nullen gibt.

Sei $n = \lfloor \log_2(p) + 1 \rfloor$ die Anzahl der Bits von p.

Programmieren Sie einen Zähler (d. h. geben Sie eine δ-Tabelle an), der

(i) $n + O(1)$ Zellen des Bandes benutzt und

(ii) $\Theta(2^n) = \Theta(p)$ Schritte ausführt.

Besser kann ein Zähler nicht sein!

Zähler sind sehr nützliche Turingmaschinen. Sie werden häufig als Unterprogramme benutzt, d. h. die aktuelle Zahl wird um 1 verringert, mit der dann bestimmten Zahl wird etwas gemacht, und dann wird die Zahl wieder verringert, usw. Damit kann man dann etwas p Mal wiederholen.

Natürlich werden Zähler auch gern „in die andere Richtung“ benutzt, d. h. es wird z. B. die Länge eines Wortes, das auf einem anderen Band steht, durch Hochzählen berechnet.

Zur Lösung der Aufgabe müssen Sie sich überlegen, wie die Subtraktion von 1 durch Zeichenmanipulation realisiert werden kann.

Etwas schwieriger wird die Aufgabe an der Stelle (ii), wo es darum geht, die Laufzeit zu berechnen. „Offensichtlich“ ist, daß die Zahl der Schritte nicht mehr als $O(p^2)$ ist. Um genauer zu sein, brauchen Sie gegebenenfalls beim Rechnen eine Variable a_q, die, für $q \in \mathbb{N}$, die Länge des Blocks von Nullen ganz rechts in $\mathrm{bin}(q)$ bezeichnet, also z. B. $a_{12} = 2$.

Je nach gewähltem Ansatz kann es sein, daß Sie auf die Reihe $\sum_{r=0}^{x} \frac{r}{2^r}$ stoßen, für die gilt:

$$\sum_{r=0}^{x} \frac{r}{2^r} = 2 - \frac{x+2}{2^x} \leq 2$$