Prof. Dr. Rolf Wanka
Bernd Bassimir, Alexander Raß, Jonas Schreiner,
Stefan Schwanecke, Jeanette Wohnig

Erlangen, 5. Februar 2019

Abgabe bis $\boxed{\text{Di., 12.02.19, 23:59 Uhr}}$

Übungen zur Vorlesung

Berechenbarkeit und Formale Sprachen

WS 2018/2019

Blatt 13

Je mehr Plus-Zeichen $+$, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

AUFGABE 65:
[Präsenzaufgabe,$++$,$\star\star$] Sei

$$L = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*,\ \#_a(w) = \#_b(w) \text{ oder } \#_b(w) = \#_c(w)\}\ .$$

Dabei bezeichnet $\#_t(w)$, wie oft der Buchstabe t im Wort w vorkommt, z. B. $\#_n(Erlangen) = 2$ (vgl. auch Aufgabe 67(b)).

Geben Sie einen (deterministischen oder nichtdeterministischen?) Kellerautomaten M an mit $L(M) = L$ und beschreiben Sie seine Arbeitsweise.

Alle folgenden Aufgabe sind Bonuspunkte-Aufgaben, um ein wenig den Punkte-Booster zu zünden. „Eigentlich" wären sie gewöhnliche Pflichtaufgaben. ☺
Ihre Abgaben werden noch bis zum 18. Februar korrigiert. Sie können sie dann in Raum 02.123-128 im Felix-Klein-Gebäude abholen.

AUFGABE 66 (4 **Bonus-** Punkte)**:**
[$+++$,$\star$] Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform:

$$\begin{array}{rclcrcl} S & \to & AB \mid BC & \quad & A & \to & BA \mid a \\ B & \to & CC \mid b & & C & \to & AB \mid a \end{array}$$

(a) Wenden Sie den CYK-Algorithmus auf die Wörter $w_1 = aaaaa$ und $w_2 = baaba$ an.

(b) Zeichnen Sie einen Syntaxbaum für w_1.

AUFGABE 67 (4 **Bonus-** Punkte)**:**
[$++++$,$\star\star$]

(a) Zeigen Sie direkt durch Anwendung der Definition, daß die folgende Sprache die kontextfreie Pumpeigenschaft hat:

$L_1 = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ \#_a(w) = \#_b(w)\}$;

dabei bezeichnet $\#_t(w)$, wie oft der Buchstabe t im Wort w vorkommt, z. B. $\#_n(Erlangen) = 2$.

(b) Zeigen Sie direkt durch Anwendung der Definition, daß die folgende Sprache die kontextfreie Pumpeigenschaft *nicht* hat:

$L_2 = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*,\ \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$

AUFGABE 68 (4 **Bonus-** Punkte)**:**
[$++++,\star$]

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie direkt durch Anwendung der Definition, daß die folgende Sprache

$$L_1^{(k)} = \{0^n 1^n 0^m 1^m \mid n \geq k,\ m \geq k\}$$

die kontextfreie Pumpeigenschaft besitzt.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie direkt durch Anwendung der Definition, daß die folgende Sprache

$$L_2^{(k)} = \{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \geq k\}$$

die kontextfreie Pumpeigenschaft *nicht* besitzt.

(Achten Sie beide Male auf das k!)

AUFGABE 69 (4 **Bonus-** Punkte)**:**
[$+++,\star\star$] Sei $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$. Wir wissen wegen des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß L nicht kontextfrei ist. Zeigen Sie, daß das Komplement $\overline{L} = \{a,b,c\}^* \setminus L$ dagegen kontextfrei ist.

Hinweis: Eine Fallunterscheidung könnte zum Ziel führen: Wie sieht ein Wort aus, das nicht in L ist? Z. B. sind alle Wörter, die mit b bzw. c beginnen, nicht in L. Natürlich sind das noch nicht alle Wörter aus $\overline{L}$.
Sie dürfen alles benutzen, was wir über kontextfreie Sprachen wissen, also auch Kellerautomaten, falls Sie sie gebrauchen könnten.

AUFGABE 70 (4 **Bonus-** Punkte)**:**
[$+++,\star$] Gegeben ist der reguläre Ausdruck $R_1 = ((0 \cup 1)^* 1)(0 \cup 1)$.

(a) Wenden Sie das *Verfahren der Vorlesung* an, um einen NFA A anzugeben, der genau die Sprache von R_1 akzeptiert, also mit $L(A) = L(R_1)$. Er wird viele ε-Übergänge enthalten.

(b) Geben Sie einen deterministischen Automaten A' mit $L(A') = L(R_1)$ an, und beschreiben Sie seine Arbeitsweise.

(c) Geben Sie eine Grammatik G vom Typ Chomsky-3 an mit $L(G) = L(R_1)$, und begründen Sie die Korrektheit.