Prof. Dr. Rolf Wanka
Bernd Bassimir, Alexander Raß, Jonas Schreiner,
Stefan Schwanecke, Jeanette Wohnig

Erlangen, 29. Januar 2019

Abgabe bis $\boxed{\text{Di., 05.02.19, 23:59 Uhr}}$

Übungen zur Vorlesung

Berechenbarkeit und Formale Sprachen

WS 2018/2019

Blatt 12

Je mehr Plus-Zeichen $+$, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

AUFGABE 60:

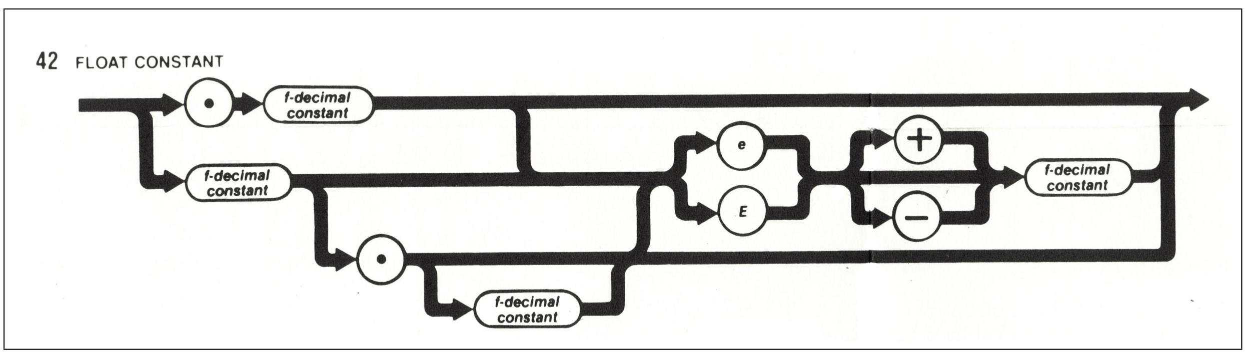
[Präsenzaufgabe,++,$\star$] Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine beliebige kontextfreie Grammatik. Eine Variable $A \in V$ heißt *nützlich*, falls es ein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt, so daß $A \xrightarrow{*} w$. Anderenfalls wird A *nutzlos* genannt.

(a) Geben Sie einen Algorithmus an, der die nutzlosen Variablen von G berechnet, beweisen Sie seine Korrektheit und bestimmen Sie seine Laufzeit in Abhängigkeit den Komponenten von G.

(b) Folgern Sie daraus, daß es zu gegebener kontextfreier Grammatik G entscheidbar ist, ob $L(G) = \emptyset$ ist oder nicht.

AUFGABE 61 (4 Punkte)**:**

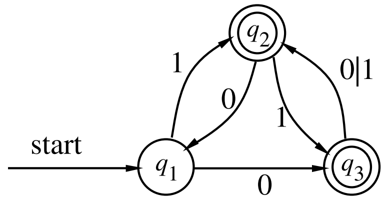
[$+++$,$\star\star$] Gegeben ist die folgende Definition 42 ☺ einer FLOAT CONSTANT aus dem in der Vorlesung gezeigten, großen *C-Syntax Graph* aus dem Buch B. W. Kernighan, D. M. Ritchie: *The C Programming Language*, 1977.



Die einzige Variable, die vorkommt, ist f-decimal constant, die Sie mit F abkürzen können. Geben Sie einen regulären Ausdruck C über $\Sigma = \{., \mathrm{e}, \mathrm{E}, +, -, F\}$ zur Beschreibung einer FLOAT CONSTANT an.

AUFGABE 62 (4 Punkte)**:**

[$++++$,$\star\star$] Gegeben ist der folgende DFA.



Konstruieren Sie *nach dem Verfahren der Vorlesung* einen äquivalenten regulären Ausdruck. Um die Ausdrücke nicht zu lang werden zu lassen, dürfen Sie während der Rechnung mögliche Vereinfachungen wie beispielsweise $(\varepsilon \cup 00)^* = (00)^*$ und $1 \cup 01 = (\varepsilon \cup 0)1$ benutzen.

AUFGABE 63 (4 Punkte)**:**
[$+++$, $\star\star$] Wenden Sie bei den folgenden Konstruktionen die Verfahren der Vorlesung an.

(a) Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Produktionen:

$$S \to ABAc \qquad A \to aBB \mid \varepsilon \qquad B \to AS \mid b \mid \varepsilon$$

Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G', in der es keine ε-Produktionen mehr gibt, mit $L(G') = L(G)$.

(b) Gegeben sei folgende kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Produktionen:

$$\begin{array}{lll} S \to A \mid aB \mid aC & B \to S \mid Ba & D \to b \mid bDD \\ A \to B \mid C \mid cAd & C \to D \mid c & \end{array}$$

Kettenregeln sind Regeln, deren linke und rechte Seite jeweils genau ein Nichtterminal-Symbol enthalten, also z.B. $A \to B$. Konstruieren Sie eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ ohne Kettenregeln.

AUFGABE 64 (4 Punkte)**:**
[$++$, $\star\star\star$] Sei

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = \#_b(w)\} \ .$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die L erzeugt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Grammatik. (Zur Bedeutung von $\#_a(w)$ vgl. Aufgabe 45)

Hinweis: Die Lösungsidee besteht darin, eine rekursive Beziehung der Wörter in L zu finden. Ist z. B. $w \in L$ von der Form $aw'b$, dann ist auch $w' \in L$. Dieser Beziehung würde die Produktion $S \to aSb$ entsprechen.

Schwieriger ist der Fall für Wörter wie $aababbbbaa \in L$. Zählen Sie positionsweise von links nach rechts den „Überschuß“ an as (der auch negativ sein kann ☺). Was muß passieren?

Vergessen Sie nicht, daß das leere Wort ε auch in L ist.

(Auf der nächsten Seite finden Sie einige Informationen zu David Hilbert →)

DAVID HILBERT wurde vor fast genau 157 Jahren, am 23. Januar 1862, in Königsberg geboren. Er gilt als einer der bedeutensten Mathematiker der neueren Zeit. Sein legendärer Vortrag auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahre 1900 hat die Forschung der Mathematik und später der Theoretischen Informatik nachhaltig beeinflußt. Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz (1931) und der für uns so wichtige Aufsatz von Alan Turing (1936) sind ohne Hilberts Arbeiten nicht vorstellbar. Das 10. Hilbertsche Problem, eine heute typische Fragestellung der Theoretischen Informatik ("Gibt es einen Algorithmus, der für eine beliebige Diophantische Gleichung entscheidet, ob sie lösbar ist?", vgl. Aufgabe 35(b) auf Blatt 7), wurde 1970 durch eine Reduktion des Halteproblems mit NEIN beantwortet. Wie ein roter Faden zieht sich durch seine Arbeiten die Frage nach Axiomen für bestimmte Gebiete und nach Regeln, wie man aus den Axiomen Folgerungen ableiten kann.

Im Jahr 1885 promovierte er in Königsberg, und 1886, im Alter von 24 Jahren (Foto), habilitierte er sich. FELIX KLEIN, unter anderem 1872 – 1875 Professor für Mathematik an der Uni Erlangen und der Namensgeber für das Mathematik/Informatik-Gebäude, holte Hilbert 1895 nach Göttingen, damals eines der bedeutendsten Zentren der Mathematik und Physik weltweit. Hilbert und Klein waren es dann auch, die EMMY NOETHER aus Erlangen nach Göttingen brachten und eine berühmte Auseinandersetzung (das gab's damals wie heute) zwischen der Uni Göttingen und dem zuständigen preußischen Ministerium anführten, als es um die Habilitierung Emmy Noethers ging. Natürlich setzte sich das Ministerium (damals wie heute) mit dem Verbot durch.

Hilbert hat zwischen 1898 und 1934 über 70 Doktoranden hervorgebracht.
(siehe `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=7298&fChrono=1`)
Unter ihnen ist WILHELM ACKERMANN, der die Berechenbarkeitstheorie untersuchte, und nach dem die berühmte Ackermann-Funktion, die man beweisbar nicht mit (klassischen) for-Schleifen berechnen kann, benannt ist.

In bewußter Analogie zu den 23 Problemen aus Hilberts Vortrag (und den zugehörigen Ergänzungen) im Jahr 1900 hat das *Clay Mathematics Institute (CMI)* im Jahr 2000 eine Liste von sieben Problemen, die sog. *Millennium-Probleme*, zusammengestellt und für jede Lösung eine Million US-Dollar ausgelobt. Das P-NP-Problem ist dabei das Problem mit der Nummer 4.

Den unwiederbringlichen Verlust kreativer Köpfe der Universität Göttingen, darunter auch einige seiner eigenen Doktoranden, in der Zeit nach 1933 hat Hilbert mehrfach öffentlich bedauert. Er starb vor 76 Jahren, am 14. Februar 1943, im Alter von 81 Jahren an den Folgen eines Sturzes bei einem Spaziergang.