Prof. Dr. Rolf Wanka
Bernd Bassimir, Alexander Raß, Jonas Schreiner,
Stefan Schwanecke, Jeanette Wohnig

Erlangen, 22. Januar 2019

Abgabe bis $\boxed{\text{Di., 29.01.19, 23:59 Uhr}}$

Übungen zur Vorlesung

**Berechenbarkeit und Formale Sprachen**

WS 2018/2019

Blatt 11

Je mehr Plus-Zeichen $+$, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

---

**AUFGABE 55:**

[Präsenzaufgabe, $++++,\star$] Zeigen Sie:

(a) Die Sprache $L_1 = \{a^i b^j \mid 4 < i < j\}$ hat **nicht** die reguläre Pumpeigenschaft. Beachten Sie die 4 in der Eigenschaft.

(b) $L_{\text{durch 3}} = \{n \mid n \in \{0,1\}^*$ ist die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl$\}$ hat die reguläre Pumpeigenschaft.

---

**AUFGABE 56** (4 Punkte)**:**

[$++,\star\star$] Sei $L \subseteq \Sigma^*$. $L$ hat die *verdrehte* reguläre Pumpeigenschaft, falls gilt:

$$\exists n_L \in \mathbb{N}\ \forall z \in L, |z| \geq n_L\ \exists u,v,w \in \Sigma^*, z = uvw : \underbrace{|vw| \leq n_L}_{\text{(i)}} \wedge \underbrace{v \neq \varepsilon}_{\text{(ii)}} \wedge \underbrace{\forall i \geq 0 : uv^iw \in L}_{\text{(iii)}}$$

(Eigenschaft (i) ist gegenüber der „normalen“ regulären Pumpeigenschaft verändert. $\rightarrow$ Rückseite des Blatts)

Zeigen Sie: $L$ regulär $\Rightarrow$ $L$ hat die verdrehte reguläre Pumpeigenschaft.

**AUFGABE 57** (4 Punkte)**:**

[$+++,\star$] Sei $L = \{2^j 1^k 0^k \mid 1 \leq j, 2 \leq k\} \cup \{0,1\}^*$. Zeigen Sie:

(a) $L$ besitzt die reguläre Pumpeigenschaft.

(b) $L$ ist **nicht** regulär.

**AUFGABE 58** (4 Punkte)**:**

[$++++++,\star$] (Klausuraufgabe vom April 2017)

Sei $z = z_1 z_2 \cdots z_k \in \{0,1\}^k$. Dann ist das bitweise Komplement $z^{\text{bc}} = (1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_k)$, also zum Beispiel: $z = 10110$ und $z^{\text{bc}} = 01001$. Außerdem ist $\varepsilon^{\text{bc}} = \varepsilon$.

Zeigen Sie **direkt durch Anwendung der Definition** der regulären Pump-Eigenschaft, daß die Sprache

$$L_{3\text{c}} = \{z z^{\text{bc}} \mid z \in \{0,1\}^*\}$$

die reguläre Pump-Eigenschaft **nicht** besitzt.

*Beispiele:* $10110100 \in L_{3\text{c}}$, $00001111 \in L_{3\text{c}}$, $0000001111 \notin L_{3\text{c}}$

**AUFGABE 59** (4 Punkte)**:**

[$++,\star\star$] Sei $L$ eine **beliebige** Sprache, die (i) entscheidbar ist und (ii) die reguläre Pumpeigenschaft besitzt. (Denken Sie daran, daß das nicht heißt, daß $L$ regulär ist! Vgl. Aufgabe 57.) Zeigen Sie: Es ist entscheidbar, ob $L$ unendlich viele Wörter enthält.

*Hinweis*: Sei $n_L$ die Konstante der regulären Pumpeigenschaft, und sei $L$ unendlich. Zeigen Sie, daß es dann und nur dann ein Wort $z \in L$ geben muß mit $n_L \leq |z| \leq 2n_L$.

Ausführliche Anmerkungen zur Pump-Eigenschaft $\rightarrow$ nächste Seite

Da es immer wieder zu Verwirrungen kommt, was man zeigen muß, wenn der Nachweis geführt werden soll, daß eine Sprache die reguläre Pump-Eigenschaft nicht besitzt, sind hier noch ein paar aussagenlogische Umformungen und danach ein Beispiel:

Sei $L$ eine Sprache über $\Sigma$. Dann gilt das folgende **Pumping-Lemma** für reguläre Sprachen.

$$L \text{ ist regulär } \Rightarrow \exists n_L \in \mathbb{N}\ \forall z \in L, |z| \geq n_L\ \exists u,v,w \in \Sigma^*, z = uvw : \underbrace{|uv| \leq n_L}_{\text{(i)}} \wedge \underbrace{v \neq \varepsilon}_{\text{(ii)}} \wedge \underbrace{\forall i \geq 0 : uv^i w \in L}_{\text{(iii)}}$$

Die reguläre Pump-Eigenschaft ist also eine *notwendige* Eigenschaft für Regularität, hinreichend ist sie *nicht*. Daher ist das Hauptanwendungsgebiet des Pumping-Lemmas der Nachweis, daß eine Sprache $L$ **nicht** regulär ist. Dazu benutzt man dann die Kontraposition der Aussage des Pumping-Lemmas, die insgesamt zur ursprünglichen Aussage *äquivalent*(!) ist.

Die Kontraposition, die man rein formal durch Invertieren erhält, lautet:

$$\forall n_L \in \mathbb{N}\ \exists z \in L, |z| \geq n_L\ \forall u,v,w \in \Sigma^*, z = uvw : \neg(|uv| \leq n_L) \vee \neg(v \neq \varepsilon) \vee \neg(\forall i \geq 0 : uv^i w \in L)$$
$$\Rightarrow L \text{ ist } \textit{nicht} \text{ regulär}$$

Die Aussage nach dem ersten Doppelpunkt ist etwas sperrig. Sie ist von der Form $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$. Dies kann man *äquivalent*(!) umformen zu $(A \wedge B) \Rightarrow \neg C$ (machen Sie sich klar, daß das tatsächlich stimmt! Prädikatenlogisches Stichwort: Horn-Klausel). Damit ergibt sich die folgende Form des Pumping-Lemmas:

$$(\star)\ \ \forall n_L \in \mathbb{N}\ \exists z \in L, |z| \geq n_L\ \forall u,v,w \in \Sigma^*, z = uvw : \Big( (\overbrace{|uv| \leq n_L}^{\text{(i)}} \wedge \overbrace{v \neq \varepsilon}^{\text{(ii)}}) \Rightarrow \overbrace{\exists i \geq 0 : uv^i w \notin L}^{\neg\text{(iii)}} \Big)$$
$$\Rightarrow L \text{ ist } \textit{nicht} \text{ regulär}$$

Dies begründet das Vorgehen: Man nimmt an, daß (i) und (ii) gelten, und zeigt dann, daß es eine Zahl $i$ gibt mit $uv^i w \notin L$

Das Ganze wird jetzt noch einmal ganz aufführlich an einem Beispiel durchgeführt:

Sei $L = \{a^j b^j \mid j \geq 0\}$.

Zu zeigen: $L$ hat die reguläre Pumpeigenschaft *nicht*. Dann muß die Zeile $(\star)$ gelten.

- Sei $n_L \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. ($\forall$-Quantor)
- Setze $z = a^{n_L} b^{n_L} \in L$. ($\exists$-Quantor)
- Seien $u,v,w \in \{a,b\}^*$ beliebig, aber fest mit $uvw = z = a^{n_L} b^{n_L}$. ($\forall$-Quantor)
- Außerdem sollen (i) und (ii) gelten, also $|uv| \leq n_L$ und $v \neq \varepsilon$. Wegen (i) besteht $uv$ ausschließlich aus $a$s und wegen (ii) aus mindestens einem $a$. D. h.: $v = a^k$ für ein $k$ mit $1 \leq k \leq n_L$.
- Setze $i := 2$. ($\exists$-Quantor, in der Vorlesung wählten wir $i := 0$)
  Betrachte $uv^2 w$. Es ist $uv^2 w = a^{n_L+k} b^{n_L}$. Da $k \geq 1$ ist, gibt es mindestens ein $a$ mehr als $b$s, also ist $uv^2 w \notin L$