

Übungen zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Formale Sprachen
WS 2018/2019
Blatt 9

Je mehr Plus-Zeichen +, desto wichtiger, je mehr Sterne *, desto schwieriger.

AUFGABE 45:

[Präsenzaufgabe, + + +, **] Sei Σ ein Alphabet, und für $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$ bezeichne $\#_a(w)$, wie oft a in w auftaucht. Also ist z. B. $\#_1(01100) = 2$.

Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ und die Sprache $L = \{w \mid w \in \Sigma^*, \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w) = \#_c(w)\}$ gegeben.

- (a) Geben Sie eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ an, die L erzeugt. Vergessen Sie nicht zu *beweisen*, daß Ihre Grammatik korrekt ist, also $L \subseteq L(G)$ und $L \supseteq L(G)$ gilt.
 - (b) Leiten Sie das Wort $acbac \in L$ mit Ihrer Grammatik her.
-

AUFGABE 46 (4 Punkte):

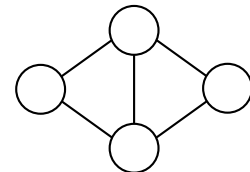
[+ + +, *] Nach dem großen Beispiel für SAT in der Vorlesung und am Ende von Blatt 8 ist jetzt nur ein * übriggeblieben. ☺

- (a) Beschreiben Sie das Knotenüberdeckungsproblem VC als binäres Programm.
- (b) Beschreiben Sie CLIQUE als binäres Programm.

AUFGABE 47 (4 Punkte):

[+, **] Diese Aufgabe holt aus der Reduktion von 3SAT auf 3COL (Blatt 8, Aufgabe 43) das Letzte heraus. Ziel ist es, den Graphen, für den man eine Knoten-3-Färbung berechnen soll, möglichst einfach zu machen, die Frage nach der 3-Färbbarkeit aber weiterhin NP-vollständig zu halten.

In der Reduktion von 3SAT auf 3COL in Aufgabe 43 auf Blatt 8 hängen die Grade der Knoten des konstruierten Graphen G_Φ von der Anzahl t der Klauseln und der Anzahl n der Variablen der Eingabe-KNF Φ ab: Der Knoten, der die Farbe TRUE definiert, hat den Grad $2t + 2$, der Knoten für die Farbe EGAL den Grad $2n + 2$ und die Knoten x_i bzw. \bar{x}_i können einen Grad von bis zu $t + 2$ haben.



Benutzen Sie den rechts dargestellten Graphen als (mehrfach „baumartig“ angewandten) Baustein, um den maximalen Knotengrad auf 6 zu senken.

Hinweis: Welche Farbe muß vom linken und vom rechten Knoten angenommen werden?

Damit ist gezeigt: Das Problem zu entscheiden, ob die Knoten eines Graphen mit maximalem Grad 6 mit drei Farben gefärbt werden können, ist NP-vollständig.

AUFGABE 48 (4 Punkte):

[+++,*] Gegeben ist die folgende Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, X, \Rightarrow, \$\}$, $\Sigma = \{\odot\}$ und der Menge P der folgenden sechs Produktionen:

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow \$X\$ & \$X \rightarrow \$\Rightarrow & \Rightarrow X \rightarrow XX\Rightarrow \\ \Rightarrow \$ \rightarrow XX\$ & X \rightarrow \odot & \$ \rightarrow \epsilon \end{array}$$

(a) Leiten Sie das Wort $\odot\odot\odot\odot$ her.

(b) Sei $L := \{\odot^{2^k} \mid k \geq 0\}$. Begründen Sie, warum $L(G) = L$ ist, indem Sie die Arbeitsweise von G erklären. Dazu gehört auch die Erklärung dafür, warum G keine anderen Wörter als die aus L erzeugen kann!

In \LaTeX bekommen Sie den Pfeil „ \Rightarrow “ wie folgt:

```
\usepackage{pifont}
\newcommand{\pfeil}{\text{\ding{245}}}
```

AUFGABE 49 (4 Punkte):

[+++,*] Sei Σ ein endliches Alphabet. Ein Wort $w \in \Sigma^*$ heißt *Palindrom*, falls $w = w^R$ ist, es also vorwärts und rückwärts gelesen dasselbe Wort ist. Z. B. sind *rentner*, *maoam* und *lagerregal* Palindrome über $\Sigma = \{a, \dots, z\}$.

Sei $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ ist ein Palindrom}\}$.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L = L(G)$ an und beweisen Sie deren Korrektheit.

Bitte den Wochentag, die Uhrzeit und den Namen der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe, in der Sie das Blatt abholen möchten, auf die Abgabe schreiben!

*Abgabe bis **Di., 23:59 Uhr** im Briefkasten links vor dem blauen Hochhaus.*

<https://www.cs12.tf.fau.de/lehre/lehrveranstaltungen/vorlesungen/berechenbarkeit-und-formale-sprachen/>