Prof. Dr. Rolf Wanka
Bernd Bassimir, Alexander Raß, Jonas Schreiner,
Stefan Schwanecke, Jeanette Wohnig

Erlangen, 27. November 2018

Abgabe $\boxed{\text{Di., 04.12.18, 23:59 Uhr}}$

Übungen zur Vorlesung

Berechenbarkeit und Formale Sprachen

WS 2018/2019

Blatt 5

Je mehr Plus-Zeichen $+$ bei einer Aufgabe, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

AUFGABE 25:
[Präsenzaufgabe, $+++, \star\star$] Sei $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

(a) Beschreiben Sie *informell* eine deterministische 2-Band-Turingmaschine, die L entscheidet, und geben Sie ihre Laufzeit an.

(b) Geben Sie formal eine nichtdeterministische 2-Band-Turingmaschine an, die L akzeptiert. Beschreiben Sie ihre Arbeitsweise und geben Sie ihre exakte Laufzeit an.

AUFGABE 26 (4 Punkte)**:**
[$++++, \star\star\star$] Zeigen Sie durch Reduktion, daß die Sprache

$$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ ist det. 1-Band-TM; es gibt eine Eingabe } x \in \{0,1\}^*, \text{ so daß } M \text{ gestartet mit } x \text{ irgendwann einmal mindestens fünfmal unmittelbar hintereinander den Kopf nach rechts bewegt}\}$$

nicht entscheidbar ist.

Hinweis: Eine Reduktion z. B. des Halteproblems H auf L wird natürlich auch hier zum Ziel führen. Allerdings, das einfache „Drumherumprogrammieren“, wie wir es bislang eigentlich immer gemacht haben, klappt nicht. (Überlegen Sie sich warum! Das hat etwas damit zu tun, daß es letzlich *überall* um 1-Band-TMs geht. Dies ist die Aufgabe, in der es um die Richtung $\Leftarrow$ in der Reduktion geht.)

AUFGABE 27 (4 Punkte)**:**
[$+++, \star\star$] M bzw. M' bezeichnen im folgenden immer eine deteterministische 1-Band-Turingmaschine. Zeigen Sie mittels Reduktion, daß die folgenden Sprachen unentscheidbar sind.

(a) $L_1 := \{(\langle M\rangle, \langle M'\rangle) \mid$ für jede Eingabe, für die M hält, hält M' nicht, und umgekehrt$\}$

(b) $L_2 = \{\langle M\rangle w \mid w = \mathrm{bin}(k), k \in \mathbb{N}$, es gibt genau k verschiedene Eingaben, für die M hält$\}$
(alte Klausuraufgabe)

Zur Erinnerung: $\mathrm{bin}(k)$ bezeichnet die Binärdarstellung von k, also z. B. $\mathrm{bin}(42) = 101010$.

AUFGABE 28 (4 Punkte)**:**
[$++, \star\star$] Zeigen Sie die folgende, „stärkere“ Variante von Satz 1.23:

> **Satz:** Sei L eine unendliche Sprache.
> L ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn es eine Turingmaschine M gibt, die eine total berechenbare *bijektive* Funktion $f : \{0,1\}^* \to L$ berechnet.

Hinweis: Es geht darum, daß f für verschiedene Eingaben verschiedene Wörter aus L ausgeben muß, und daß jedes Wort von L ausgebbar sein muß. Im Beweis geht es eigentlich nur um die Richtung „$\Rightarrow$“.

Interpretieren Sie die Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ als zur Basis 2 dargestellte natürliche Zahl $n_x = (1x)_2$. Benutzen Sie die Maschine M_g aus der Richtung „$\Rightarrow$“ des Beweises von Satz 1.23. Sie dürfen Ihren Algorithmus auf höherem, programmiersprachen-ähnlichen Niveau beschreiben.

Für die folgende Aufgabe, für die Sie Bonus-Punkte bekommen, können Sie sich bis zum 11. Dezember 2018 Zeit lassen (Abgabe im üblichen Briefkasten). Sie ist zum Hintergrund-Verständnis einiger Zusammenhänge recht wichtig.

AUFGABE 29 (4 **Bonus**- Punkte)**:**
[$++ +, \star$] Aus Aufgabe 11 (Blatt 2) kennen Sie die Sprache $L = \{w\#w^{\mathrm{R}} \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

Zeigen Sie: $L \leq H_\varepsilon$

Hinweis: Was wurde in Aufgabe 11(a) durch die Programmierung der geforderten Turingmaschine *gezeigt*? Und schauen Sie sich noch einmal die in der Vorlesung vorgestellte *falsche* Reduktionsfunktion an. Was war dort falsch? Könnte es hier richtig sein?

Bitte den Wochentag und die Uhrzeit Ihrer Übungsgruppe auf die Abgabe schreiben!
Abgabe im Briefkasten links vor dem blauen Hochhaus.
`https://www.cs12.tf.fau.de/lehre/lehrveranstaltungen/vorlesungen/berechenbarkeit-und-formale-sprachen/`