Prof. Dr. Rolf Wanka
Bernd Bassimir, Alexander Raß, Jonas Schreiner,
Stefan Schwanecke, Jeanette Wohnig

Erlangen, 13. November 2018

Abgabe Di., 20.11.18, 23:59 Uhr

# Übungen zur Vorlesung
# **Berechenbarkeit und Formale Sprachen**
## WS 2018/2019
## Blatt 3

Je mehr Plus-Zeichen $+$ bei einer Aufgabe, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

**AUFGABE 15:**
[Präsenzaufgabe, $++++,\star$] $M$ bezeichne eine deteterministische 1-Band-Turingmaschine. Betrachten Sie die Sprache

$$L = \{\langle M\rangle \mid \text{es gibt mindestens zwei Eingaben } x_1 \in \Sigma^* \text{ und } x_2 \in \Sigma^*, x_1 \neq x_2, \text{ so daß } M \text{ gestartet mit } x_1 \text{ hält und } M \text{ gestartet mit } x_2 \text{ hält.}\}$$

Zeigen Sie:

(a) $L$ ist rekursiv aufzählbar.
(Sie bekommen $\langle M\rangle$ und nur $\langle M\rangle$ und müssen sich auf die Suche nach $x_1$ und $x_2$ machen.)

(b) $L$ ist unentscheidbar.

---

Die folgenden Aufgaben sind „klassische Hausaufgaben“, die Sie bearbeiten und gelöst abgeben.

**AUFGABE 16** (4 Punkte)**:**
[$++++,\star\star$] Eine 3-Zellen-Registermaschine $M_{3Z}$ ist eine Registermaschine, die nur die Speicherzellen $c(0)$ (den Akkumulator), $c(1)$, $c(2)$ und $c(3)$ hat.

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \delta, F)$ eine beliebige deterministische 1-Band-Turingmaschine mit Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, B\}$. Beschreiben Sie informell eine 3-Zellen-Registermaschine $M_{3Z}$, die die TM $M$ simuliert. Dabei soll die Eingabe $\bar{x} \in \{0,1\}^*$ von $M$ in $M_{3Z}$ in Zelle $c(1)$ stehen, und zwar als Zahl $(1\bar{x})_3$, also als Zahl zur Basis 3 (!). Z. B. $\bar{x} = 010$ steht als $(1010)_3 = 30$ in Zelle $c(1)$.

*Hinweis*: Wie gehen Sie mit dem Blanksymbol $B$ um? Wie verteilen Sie den Bandinhalt auf die Speicherzellen?

**AUFGABE 17** (4 Punkte)**:**
[$+++,\star\star$] In der Vorlesung wurde eine universelle **2**-Band-Turingmaschine $M_0$ vorgestellt, die jede $t(n)$-zeit- und $s(n)$-platzbeschränkte **1**-Band-Turingmaschine $M$ in Zeit $O(t(n))$ auf Platz $O(s(n))$ ausführt.

Wenn Sie nun diese Ausführung auf einer **1**-Band-Turingmaschine $M_0'$ gemäß Satz 1.7 der Vorlesung (Stichwort: *Spurtechnik*) simulieren, bekommen Sie eine Laufzeit der somit universellen **1**-Band-Turingmaschine $M_0'$ von $O(t(n) \cdot s(n))$.

Da insbesondere $s(n) = \Theta(t(n))$ sein kann. bedeutet dies also: $M_0'$ ist eine universelle **1**-Band-Turingmaschine, die für die Ausführung einer $t(n)$-zeitbeschränkten **1**-Band-Turingmaschine eine Ausführungszeit von $O(t(n)^2)$ hat, was wir uns nicht wirklich wünschen.

(a) Wo verliert die 1-Band-Turingmaschine $M'_0$ bei der Simulation der 2-Band-Turingmaschine $M_0$ den Faktor $s(n)$?

(b) Überlegen Sie sich einen Trick, wie man die Laufzeit von $M'_0$ auf $O(t(n))$ senken kann, d. h. Sie brauchen sich insgesamt keine neue Simulation auszudenken, um — als das Ergebnis dieser Aufgabe — eine universelle **1**-Band-Turingmaschine $M''_0$ anzugeben, die jede $t(n)$-zeit- und $s(n)$-platzbeschränkte **1**-Band-Turingmaschine $M$ in Zeit $O(t(n))$ auf Platz $O(s(n))$ simuliert.

*Hinweis*: Wie schon in der Vorlesung erwähnt: die Gödelnummer einer Turingmaschine hat immer die Länge $O(1)$. Wenn man das mal nicht ausnutzen kann … ☺ (ich hatte in der Vorlesung ja bereits die Idee „erlaufen“)

**AUFGABE 18** (4 Punkte)**:**
$[+++,\star]$ Seien $L_1$ und $L_2$ beliebige Sprachen. Beantworten Sie die folgenden Fragen (und beweisen Sie Ihre Antworten).

(a) Ist $L_1$ unentscheidbar und $L_1 \subseteq L_2$, ist dann $L_2$ notwendigerweise unentscheidbar?

(b) Ist $L_1$ entscheidbar und $L_1 \supseteq L_2$, ist dann $L_2$ notwendigerweise entscheidbar?

(c) Ist $L_1$ entscheidbar und $L_2$ rekursiv aufzählbar, ist dann notwendigerweise $L_1 \setminus L_2$ rekursiv aufzählbar? („\“ bezeichnet dabei die Mengendifferenz)

Beachten Sie, daß diese Aufgabe nur einen $\star$ hat. Jedoch ist meistens die erste Idee nicht richtig.

**AUFGABE 19** (4 Punkte)**:**
$[+++,\star\star]$ Sei $M = (Q,\Sigma,\Gamma,B,q_0,\delta,F)$ eine deterministische 1-Band-Turingmaschine, und sei $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^n$ eine Eingabe für $M$. Für $M$ wurde bewiesen, daß, wenn $M$ gestartet mit $w$ hält, höchstens $s(|w|)$ viele Speicherzellen besucht werden.

Zeigen Sie: Wenn $M$ gestartet wird mit einem Eingabewort $w$ der Länge $n$ und mehr als $s(n) \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{s(n)}$ Schritte macht, ohne zu halten, dann wird $M$ mit $w$ gar nicht mehr halten.

*Hinweis*: Zählen Sie, wieviele verschiedene Konfigurationen in Abhängigkeit von der Eingabelänge $n$ die Maschine $M$ haben kann, egal, ob die nun erreichbar sind oder nicht. Nehmen Sie sich dazu ganz konkret die Definition einer Konfiguration als Zeichenfolge her.

Die Anzahl der $n$-Tupel mit Elementen aus einer Menge $A$ ist $|A|^n$. Z. B. ist die Anzahl der 0-1-Folgen der Länge $n$ genau $2^n$.

*Bitte den Wochentag, die Uhrzeit und den Namen der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe, in der Sie das Blatt abholen möchten, auf die Abgabe schreiben!*
*Abgabe bis* ***Di., 23:59 Uhr*** *im Briefkasten links vor dem blauen Hochhaus.*
`https://www.cs12.tf.fau.de/lehre/lehrveranstaltungen/vorlesungen/berechenbarkeit-und-formale-sprachen/`