Prof. Dr. Rolf Wanka
Bernd Bassimir, Alexander Raß, Jonas Schreiner,
Stefan Schwanecke, Jeanette Wohnig

Erlangen, 16. Oktober 2018

Übungen zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Formale Sprachen
WS 2018/2019
Blatt 0 ☺

Die sog. *O-Notation* (die *Landauschen Symbole*) beachtet bei Funktionen nur ihr Wachstum. Multiplikation mit konstanten Faktoren und Addition von weniger stark wachsenden Funktionen werden damit in gewisser Weise unwichtig, es geht nur um die Asymptotik. Seien also $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ zwei Funktionen.

$$
\begin{array}{lcl}
g(n) = O(f(n)) & :\Longleftrightarrow & \exists c > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n), \quad \text{(„Groß Oh“)} \\
g(n) = \Omega(f(n)) & :\Longleftrightarrow & f(n) = O(g(n)), \quad \text{(„Groß Omega“)} \\
g(n) = \Theta(f(n)) & :\Longleftrightarrow & g(n) = O(f(n)) \text{ und } g(n) = \Omega(f(n)), \quad \text{(„Theta“)} \\
g(n) = o(f(n)) & :\Longleftrightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = 0, \quad \text{(„Klein Oh“)} \\
g(n) = \omega(f(n)) & :\Longleftrightarrow & f(n) = o(g(n)) \quad \text{(„Klein Omega“)}
\end{array}
$$

Beachten Sie, daß diese Schreibweise eine Konvention ist, die Gleichheitszeichen werden von links nach rechts gelesen und bezeichnen keine echte Gleichheit.
Ziel der folgenden Aufgaben ist es, mit dieser Notation vertraut zu werden.

AUFGABE 1:
Zeigen Sie:

(a) $30 \cdot n^2 + 104 \cdot n \cdot \log_2 n = O(n^3)$

(b) $40 \cdot n \cdot \log_2 n = \Omega(n)$

(c) $30 \cdot n^2 + 104 \cdot n \cdot \log_2 n = \Theta(n^2)$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i = O(n^2)$

(e) $n \cdot (\log_2 n)^2 - 7 \cdot n = o(n^2 \cdot \log_2 n)$

(f) $\sqrt{n \cdot \log_2 n} = \omega\left(\sqrt{n \cdot \log_2 \log_2 n}\right)$

(g) $3^{2801} \cdot n^{27} = o(1.0007^{n/34000})$

(h) $\log_2(n!) = O(n \cdot \log_2 n)$

(i) $3 \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^n = o\left(\left(\frac{n}{2}\right)^n\right)$

(j) $2^n = o(\mathrm{e}^n)$, wobei e die Eulerzahl ist.

(k) $\max\{f_1(n), f_2(n)\} = \Theta(f_1(n) + f_2(n))$

AUFGABE 2:
Geben Sie „möglichst kleine“ (im asymptotischen Sinn) Funktionen $g(n)$ an, so daß $f(n) = O(g(n))$ ist.:

(a) $f(n) = n^{1/\log_2 n}$ (Achtung! Mit Taschenrechner rumprobieren. ☺)

(b) $f(n) = n \cdot |\sin(n \cdot \pi)|$

(c) $f(n) = 2^{2n+\log_2 n}$

(d) $f(n) = n^{\sin(n)\cdot\cos(n)}$

(e) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$

(f) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} c^i$

(g) $f(n) = n!$
Hinweis: Suchen Sie dazu in einer Formelsammlung die *Stirlingsche Formel* heraus und wenden Sie sie an.
Die Antwort $g(n) = n^n$ wäre „zu groß“.

AUFGABE 3:
Gerne schreibt man auch z. B. $2^{O(f(n))}$, um auszudrücken, daß im Exponenten eine Funktion $g(n)$ mit $g(n) = O(f(n))$ steht. Die anderen Buchstaben der O-Notation werden entsprechend eingesetzt. Machen Sie sich den Unterschied zwischen $\Theta(2^{\log n})$ und $2^{\Theta(\log n)}$ klar:

Sei $f_1(n) = \Theta(2^{\log n})$ und $f_2(n) = 2^{\Theta(\log n)}$. Listen Sie die Beziehungen zwischen $f_1(n)$ und $f_2(n)$ auf, also z. B. $f_1(n) = O(f_2(n))$, falls gilt: ....
Richten sie Ihr Augenmerk besonders auf die Klein-o-Beziehung (inklusive einer Fallunterscheidung).

AUFGABE 4:
Der folgende Algorithmus führt einige Berechnungen mit Matrizen durch. Welchen Wert haben die Additionszähler am Ende der Berechnung? Geben Sie die Gesamtzahl der Additionen in O-Notation in Abhängigkeit der erläuterten Parameter n und m an.

```
// Eingabe sind zwei Matrizen M und N, das Ergebnis wird in R gespeichert
// M ist eine n × m-Matrix, N eine m × n-Matrix

addition1 = 0;
addition2 = 0;

for i = 1 to M.zeilen do
   for j = 1 to N.spalten do
      // berechne das Element an der Stelle (i, j)
      summe = 0;
      for r = 1 to M.spalten do
         summe+ = M(i,r) * N(r, j);
         addition1 ++
      done;
      R(i, j) = summe
   done
done;

// Berechne die Spur der Matrix
spur = 0;
for i = 1 to R.zeilen do
   summe+ = R(i,i);
   addition2 ++
done
```

Diese Aufgaben brauchen noch nicht abgegeben zu werden, sollten aber durchaus bearbeitet werden, damit sie in den Übungen besprochen werden können.