Rolf Wanka Erlangen, 12. April 2018

Übungen zur Vorlesung
Approximationsalgorithmen
SS 2018
Blatt 1

Das NP-vollständige Entscheidungsproblem CLIQUE ist definiert als

$$\textsc{Clique} = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ ein Graph, der einen vollständigen Teilgraphen aus mindestens } k \text{ Knoten besitzt}\} \ .$$

AUFGABE 1:
Zur Erinnerung:

Ein *kombinatorisches Optimierungsproblem* Π ist charakterisiert durch vier Komponenten:

- $\mathcal{D}$: die Menge der (Problem)-Instanzen, Eingaben.
- $S(I)$ für $I \in \mathcal{D}$: die Menge der zu Eingabe I zulässigen Lösungen.
- Die Bewertungs- oder Maßfunktion $f : S(I) \to \mathbb{N}^{\neq 0}$.
- $\mathsf{ziel} \in \{\min, \max\}$.

Gesucht ist zu $I \in \mathcal{D}$ eine zulässige Lösung $\sigma_{\text{opt}} \in S(I)$, so daß

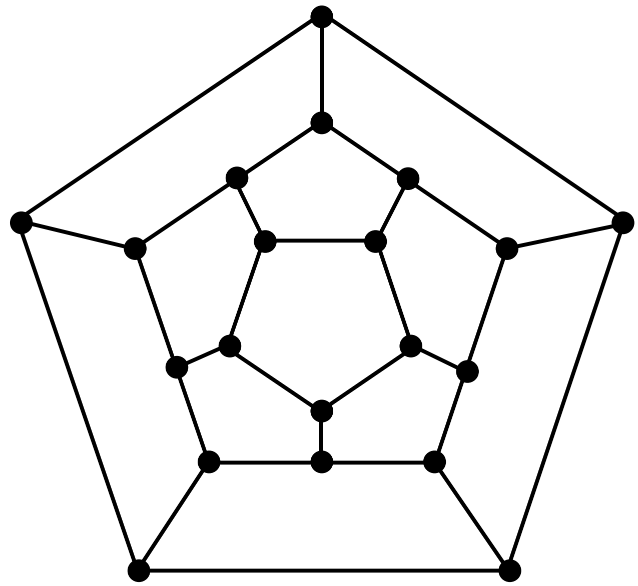
$$f(\sigma_{\text{opt}}) = \mathsf{ziel}\{f(\sigma) \mid \sigma \in S(I)\} \ .$$

Beschreiben Sie die Optimierungsvariante von CLIQUE gemäß dieser Definition durch ihre vier Komponenten.

AUFGABE 2:
Zeigen Sie: Wenn es einen Polynomzeit-Algorithmus A_{ent} für das Entscheidungsproblem CLIQUE gibt, dann gibt es auch einen Polynomzeit-Algorithmus A_{opt} zur Lösung des in Aufgabe 1 beschriebenen Optimierungsproblems, in dem zu einem Graphen ein größter vollständiger Teilgraph berechnet werden soll (ein solcher Teilgraph muß ausgegeben werden!). Gehen Sie dabei in zwei Stufen vor: (a) berechnen Sie zuerst die Größe eines maximalen vollständigen Teilgraphen und (b) bestimmen Sie erst dann einen solchen.

Nehmen Sie an, daß A_{ent} die Laufzeit $t(n)$ hat. Bestimmen Sie die Laufzeit von A_{opt}.

AUFGABE 3:
Der irische Astronom und Mathematiker Sir William Rowan Hamilton ($*$ 1805 – † 1865) erfand 1857 das Spiel „The Icosian Game". Bei diesem Spiel ist eine hölzerne Form des rechts dargestellten regulären Dodekaeders gegeben.

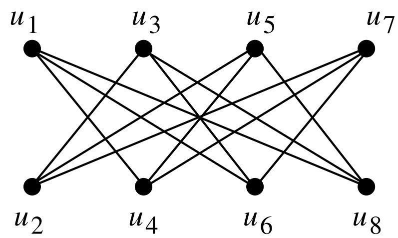


Den Knoten sind Städtenamen zugeordnet, die Kanten entsprechen Straßenverbindungen. Ziel ist es, eine möglichst lange Reiseroute entlang der Kanten des Dodekaeders (Weglänge = Anzahl der Kanten) zu finden, die jede Stadt auf der Route nur genau einmal besucht und dort aufhört, wo sie beginnt. Länge ist hierbei die Anzahl der Kanten.

(a) Spielen Sie dieses Spiel.

(b) Formulieren Sie es unabhängig vom gezeigten Graphen formal als kombinatorisches **Optimierungs**problem (Hinweis: *längste Kreise*).

AUFGABE 4:
Ein Graph $G = (V_1 \cupdot V_2, E)$ heißt *bipartit*, wenn es nur Kanten zwischen Knoten aus V_1 und V_2 gibt, aber keine Kanten, die Knoten innerhalb von V_i verbinden ($\cupdot$ bezeichnet die disjunkte Vereinigung). Der folgende Graph ist bipartit:



Sei Δ der Grad eines beliebigen bipartiten Graphen G. Finden Sie in der Literatur oder dem Internet einen Beweis dafür, daß G immer eine Kantenfärbung mit maximal Δ Farben besitzt, und stellen Sie diesen Beweis in eigenen Worten vor.