

Übungen zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Formale Sprachen
 WS 2009/2010
 Blatt 12

Je mehr Plus-Zeichen +, desto wichtiger, je mehr Sterne *, desto schwieriger.

AUFGABE 59 (4 Punkte):

[Präsenzaufgabe, ++, *] Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Eine Variable $A \in V$ heißt *nützlich*, falls es ein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt, so daß $A \xrightarrow{*} w$. Anderenfalls wird A *nutzlos* genannt.

- (a) Geben Sie einen Algorithmus an, der die nutzlosen Variablen von G berechnet, beweisen Sie seine Korrektheit und bestimmen Sie seine Laufzeit in Abhängigkeit der Komponenten von G .
- (b) Folgern Sie daraus, daß es zu gegebener kontextfreier Grammatik G entscheidbar ist, ob $L(G) = \emptyset$ ist oder nicht.

Hinweis: In der Vorlesung wurde eine Verfahren angegeben, das die Variablen A bestimmt, für die $A \xrightarrow{*} \epsilon$ gilt. Dieser Algorithmus ist gewissermaßen der Spezialfall mit $w = \epsilon$ des gesuchten Verfahrens.

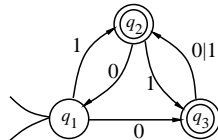
AUFGABE 60 (4 Punkte):

[++++, **] Zeigen Sie, daß die folgenden Sprachen die reguläre Pumpeigenschaft nicht haben:

- (a) $L_1 = \{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (b) $L_2 = \{c^i w \mid i \geq 1, w \in \{0, 1\}^*, w \text{ enthält doppelt so viele 0en wie 1en}\}$
Hinweis: Finden Sie den Unterschied zur Sprache L_2 aus Aufgabe 56.
- (c) $L_3 = \{0^i 1^j \mid \text{ggT}(i, j) = 1\}$.

AUFGABE 61 (4 Punkte):

[++++, **] Gegeben ist der folgende DFA.



Konstruieren Sie *nach dem Verfahren der Vorlesung* einen äquivalenten regulären Ausdruck. Um die Ausdrücke nicht zu lang werden zu lassen, dürfen Sie während der Rechnung mögliche Vereinfachungen wie beispielsweise $(\epsilon \cup 00)^* = (00)^*$ oder $1 \cup 01 = (\epsilon \cup 0)1$ benutzen.

AUFGABE 62 (4 Punkte):

[++++, *] Sei L eine beliebige reguläre Sprache über dem Alphabet Σ , und sei p die Konstante aus der regulären Pumpeigenschaft.

Beweisen Sie:

$$L \text{ enthält unendlich viele Wörter} \iff \text{Es gibt mindestens ein Wort } x \in L \text{ mit } p \leq |x| \leq 2p.$$

AUFGABE 63 (4 Punkte):

[++++, *] Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Produktionen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid aB \mid aC & B &\rightarrow S \mid Ba & D &\rightarrow b \mid bDD \\ A &\rightarrow B \mid C \mid cAd & C &\rightarrow D \mid c \end{aligned}$$

Konstruieren Sie mit dem Verfahren der Vorlesung eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' ohne Ketten-Regeln, so daß $L(G') = L(G)$ gilt.