

Übungen zur Vorlesung  
**Berechenbarkeit und Formale Sprachen**  
WS 2009/2010  
Blatt 12

Je mehr Plus-Zeichen +, desto wichtiger, je mehr Sterne \*, desto schwieriger.

**AUFGABE 59** (4 Punkte):

[Präsenzaufgabe, ++, \*] Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine kontextfreie Grammatik. Eine Variable  $A \in V$  heißt *nützlich*, falls es ein Wort  $w \in \Sigma^*$  gibt, so daß  $A \xrightarrow{*} w$ . Anderenfalls wird  $A$  *nutzlos* genannt.

- (a) Geben Sie einen Algorithmus an, der die nutzlosen Variablen von  $G$  berechnet, beweisen Sie seine Korrektheit und bestimmen Sie seine Laufzeit in Abhängigkeit der Komponenten von  $G$ .
- (b) Folgern Sie daraus, daß es zu gegebener kontextfreier Grammatik  $G$  entscheidbar ist, ob  $L(G) = \emptyset$  ist oder nicht.

*Hinweis:* In der Vorlesung wurde eine Verfahren angegeben, das die Variablen  $A$  bestimmt, für die  $A \xrightarrow{*} \varepsilon$  gilt. Dieser Algorithmus ist gewissermaßen der Spezialfall mit  $w = \varepsilon$  des gesuchten Verfahrens.

---

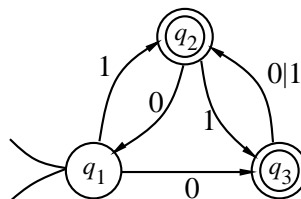
**AUFGABE 60** (4 Punkte):

[++++, \*\*] Zeigen Sie, daß die folgenden Sprachen die reguläre Pumpeigenschaft nicht haben:

- (a)  $L_1 = \{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- (b)  $L_2 = \{c^i w \mid i \geq 1, w \in \{0, 1\}^*, w \text{ enthält doppelt so viele 0en wie 1en}\}$   
*Hinweis:* Finden Sie den Unterschied zur Sprache  $L_2$  aus Aufgabe 56.
- (c)  $L_3 = \{0^i 1^j \mid \text{ggT}(i, j) = 1\}$ .

**AUFGABE 61** (4 Punkte):

[++, \*\*] Gegeben ist der folgende DFA.



Konstruieren Sie *nach dem Verfahren der Vorlesung* einen äquivalenten regulären Ausdruck. Um die Ausdrücke nicht zu lang werden zu lassen, dürfen Sie während der Rechnung mögliche Vereinfachungen wie beispielsweise  $(\varepsilon \cup 00)^* = (00)^*$  oder  $1 \cup 01 = (\varepsilon \cup 0)1$  benutzen.

**AUFGABE 62** (4 Punkte):

[++, \*] Sei  $L$  eine beliebige reguläre Sprache über dem Alphabet  $\Sigma$ , und sei  $p$  die Konstante aus der regulären Pumpeigenschaft.

Beweisen Sie:


$L$  enthält unendlich viele Wörter  $\iff$  Es gibt mindestens ein Wort  $x \in L$  mit  $p \leq |x| \leq 2p$ .

**AUFGABE 63** (4 Punkte):

[+++, \*] Gegeben sei die folgende kontextfreie Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $V = \{S, A, B, C, D\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und den Produktionen:

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow A \mid aB \mid aC & B \rightarrow S \mid Ba & D \rightarrow b \mid bDD \\ A \rightarrow B \mid C \mid cAd & C \rightarrow D \mid c & \end{array}$$

Konstruieren Sie mit dem Verfahren der Vorlesung eine äquivalente kontextfreie Grammatik  $G'$  ohne Kettenregeln, so daß  $L(G') = L(G)$  gilt.

 Die Evaluation läuft noch bis zum 29. Januar unter <http://eva.uni-erlangen.de>.  
Bitte machen Sie mit.