Prof. Dr. Rolf Wanka
Sabine Helwig, Matthias Hoffmann, Philipp Schneider

Erlangen, 21. Dezember 2009
Abgabe bis $\boxed{\text{11. Januar 2010}}$

Übungen zur Vorlesung

Berechenbarkeit und Formale Sprachen

WS 2009/2010

Blatt 9

Je mehr Plus-Zeichen $+$, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

AUFGABE 45:
[Präsenzaufgabe, $++, \star\star$] Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils deterministische endliche Automaten an, die die entsprechenden Sprachen akzeptieren, und begründen Sie deren Korrektheit.

(a) $L_{\text{durch }7} = \{n \mid n \in \{0, \dots, 9\}^*$ ist die Dezimaldarstellung einer durch 7 teilbaren Zahl$\}$.

Z. B. ist $05117 \in L_{\text{durch }7}$. Die Eingabe wird von links nach rechts gelesen. Können Sie Ihr Konstruktionsprinzip auf $L_{\text{durch }k}$, die Menge der Dezimaldarstellungen der durch k teilbaren Zahlen, verallgemeinern? Wieviele Zustände benötigen Sie und welche Bedeutung haben diese?

(b) $L_2 = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, w$ endet mit $100\}$.

Verallgemeinern Sie die Konstruktion, so daß die Sprache $L_t = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, w$ endet mit $1\underbrace{0\dots0}_{t \text{ viele}}\}$ akzeptiert wird. Wieviele Zustände hat Ihr Automat?

AUFGABE 46 (4 **Bonus**- Punkte)**:**
] [$+++, \star\star$] Gegeben ist die folgende Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, X, \twoheadrightarrow, \$\}$, $\Sigma = \{☺\}$ und der Menge P der folgenden sechs Produktionen:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} S & \to & \$X\$ & \quad & \$X & \to & \$\twoheadrightarrow & \quad & \twoheadrightarrow X & \to & XX\twoheadrightarrow \\ \twoheadrightarrow\$ & \to & XX\$ & & X & \to & \text{☺} & & \$ & \to & \varepsilon \end{array}$$

(a) Leiten Sie das Wort ☺☺☺☺ her.

(b) Sei $L := \{\text{☺}^{2^k} \mid k \geq 0\}$. Begründen Sie, warum $L(G) = L$ ist, indem Sie die Arbeitsweise von G erklären. Dazu gehört auch die Erklärung dafür, warum G keine anderen Wörter als die aus L erzeugen kann!

AUFGABE 47 (4 **Bonus**- Punkte)**:**
[$++, \star\star$] Sei

$$L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) = \#_b(w)\} \quad .$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die L erzeugt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Grammatik. (Zur Bedeutung von $\#_a(w)$ vgl. Aufgabe 42 auf Blatt 8)

Hinweis: Die Lösungsidee besteht darin, eine rekursive Beziehung der Wörter in L zu finden. Ist z. B. $w \in L$ von der Form $aw'b$, dann ist auch $w' \in L$. Dieser Beziehung würde die Produktion $S \to aSb$ entsprechen.

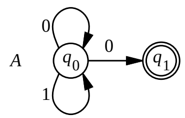
Schwieriger ist der Fall für Wörter wie $aababbbbaa \in L$. Zählen Sie positionsweise von links nach rechts den „Überschuß“ an as (der auch negativ sein kann ☺). Was muß passieren?

Vergessen Sie nicht, daß das leere Wort ε auch in L ist.

AUFGABE 48 (4 **Bonus**- Punkte)**:**
[$+++, \star\star$] Zeigen Sie: Das initiale Halteproblem H_ε ist NP-schwer, aber nicht NP-vollständig.

AUFGABE 49 (6 **Bonus**- Punkte)**:**
[$+++++, \star\star\star$] Gegeben sei der rechts dargestellte nichtdeterministische endliche Automat A mit der Sprache $L(A)$ (Denken Sie nicht darüber nach, welche Sprache der Automat konkret akzeptiert!).

Gegeben sei $w = w_1 \dots w_n \in \{0,1\}^*$ beliebig, aber fest. Geben Sie analog zum Beweis des Satzes von Cook eine Boolesche Formel Φ_w in konjunktiver Normalform an, für die gilt: Φ_w ist genau dann erfüllbar, wenn w von A akzeptiert werden kann. Orientieren Sie Ihre Konstruktion nur an dem Automaten A, nicht an der Sprache $L(A)$!



Geben Sie konkret die KNFs Φ_{010} und Φ_{011} an und für die erste KNF auch eine erfüllende Belegung.

Hinweise: Wenn $x \in L(A)$, dann gibt es eine Berechnung von A, die genau n Schritte ausführt. Der Kopf bewegt sich auf der Eingabe, die nicht verändert werden darf, nur von links nach rechts. Nutzen Sie dies, um die KNF einfacher als beim Beweis des Satzes von Cook zu gestalten.
Diese Aufgabe ist hoffentlich trotz der drei $\star$ nicht wirklich schwer. Die Sterne beschreiben mehr den etwas größeren Schreibaufwand. Es ist wirklich „nur“ eine Fleißaufgabe.

Das BFS-Team wünscht Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch und ein erfolgreiches Jahr 2010!