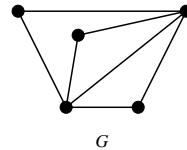


Übungen zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Formale Sprachen
WS 2009/2010
Blatt 6

Je mehr Plus-Zeichen + bei einer Aufgabe, desto wichtiger, je mehr Sterne *, desto schwieriger.

AUFGABE 32:

[Präsenzaufgabe, ++, *] Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ der Knotenmenge heißt unabhängige Menge (engl.: *independent set*), wenn es in der Kantenmenge E keine Kanten zwischen Knoten aus U gibt. Formal: $\forall u, v \in U : \{u, v\} \notin E$. (Finden Sie probehalber eine unabhängige Menge der Größe 3 im Graphen G rechts)



Das *Independent Set Problem* ist die Sprache

$$IS = \{ \langle G, k \rangle \mid \text{der Graph } G \text{ hat eine unabhängige Menge } U \text{ mit } |U| = k \} .$$

- (a) Geben Sie einen polynomiell beschränkten Verifizierer für IS an.
- (b) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Nehmen Sie an, Sie könnten IS in Zeit $O(n^\ell)$, d. h. in Polynomzeit, mit der Turingmaschine $M_{\text{ent-IS}}$ entscheiden.
 - (i) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der mit Hilfe von $M_{\text{ent-IS}}$ die Größe einer größten unabhängigen Menge in G bestimmt. Welche Laufzeit hat er?
 - (ii) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der eine größte unabhängige Menge U_{max} berechnet. Welche Laufzeit hat er?

AUFGABE 33 (4 Punkte):

[+, *] Eine Folgerung von Satz 1.24(i) ist, daß die rekursiv aufzählbaren Sprachen unter endlicher Vereinigung abgeschlossen sind, d. h. sind L_1, \dots, L_k rekursiv aufzählbar, dann ist auch $\bigcup_{i=1}^k L_i$ rekursiv aufzählbar. Wenn man nun unendlich viele rekursiv aufzählbare Mengen hat, ist dann auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ grundsätzlich rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (Es geht also um die Frage: „Sind die rekursiv aufzählbaren Sprachen unter unendlicher Vereinigung abgeschlossen?“)

Hinweis: Ein positives Beispiel ist: Sei $x \in \{0, 1\}^*$, und sei $H_x = \{ \langle M \rangle x \mid M \text{ hält auf } x \}$. Für beliebiges $x \in \{0, 1\}^*$ ist H_x rekursiv aufzählbar, und außerdem ist auch $H = \bigcup_{x \in \{0, 1\}^*} H_x$ rekursiv aufzählbar. Beachten Sie, daß die Aufgabe nur einen Stern * hat!

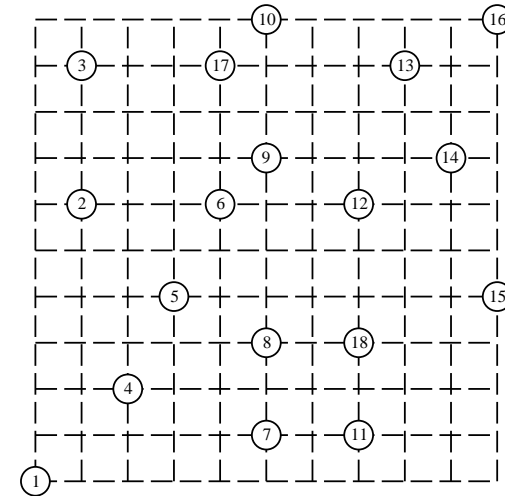
AUFGABE 34 (4 Punkte):

[+ + +, *]

- (a) Zeigen Sie: Das Reduktionskonzept ist transitiv, d. h.: $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3 \Rightarrow L_1 \leq L_3$
- (b) Wenn die Laufzeit der Berechnung der ersten Reduktionsfunktion $t_1(n) = 3n^2$ ist und die der zweiten $t_2(n) = 7n^3 + 2n$, wie groß ist dann die Laufzeit der Berechnung Ihrer Reduktionsfunktion für $L_1 \leq L_3$ höchstens?

AUFGABE 35 (4 Punkte):

[+, **] Gegeben ist auf der nächsten Seite eine Leiterplatte der Größe 11×11 und darauf 18 markierte Stellen, in die jeweils ein Loch gebohrt werden soll. Ein Bohrer fährt, von zwei Motoren angetrieben, einer für die



x -Richtung, einer für die y -Richtung, die markierten Stellen ab und bohrt jeweils das gewünschte Loch. Der Verschleiß an den beiden Motoren ist proportional zur Summe der Beträge der in x - und y -Richtung zurückgelegten Abstände. Z. B. ist der Abstand von Loch 4 zu Loch 5 (und umgekehrt) gleich 3 (*Manhattan-Norm*). Der Bohrer beginnt bei Loch 1, soll alle Löcher bohren und zum Ende wieder bei Loch 1 sein, um die nächste Leiterplatte bearbeiten zu können.

Finden Sie auf der gegebenen Leiterplatte eine solche Bohrtour mit geringem Verschleiß.

Hinweis: Kürzeste Touren haben die Länge 58. Zum Ausprobieren und für die Abgabe können Sie das Bild von unserer Webseite herunterladen.

AUFGABE 36 (4 Punkte):

[+ + +, *] Zum Bohrproblem aus Aufgabe 33 gibt insgesamt $\frac{1}{2} \cdot 17! = 177\,843\,714\,048\,000$ Touren. R. Borndörfer und M. Grötschel vom Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB) haben einmal *alle* Rundreisen aufgezählt und analysiert, um eine Verteilung der Längen aller möglichen Touren zu sehen. Dafür haben sie auf aktuellen schnellen Computern fast 11 Tage reiner Rechenzeit benötigt.

(a) Nehmen Sie nun an, daß die Eingabe 25 Bohrlöcher enthält. Wie lange würde das Programm von Borndörfer und Grötschel brauchen, um alle möglichen Touren aufzuzählen und zu analysieren? Gehen Sie dabei davon aus, daß sich die Auswertung einer einzelnen Tour nicht ändert.

(b) Gordon Moore hat 1965 einen berühmten Aufsatz geschrieben, in dem er das heute *Mooresches Gesetz* genannte Phänomen prognostizierte.

G. E. Moore. Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, 38:114–117, 1965.

Unter <http://download.intel.com/research/silicon/moorespaper.pdf> kann der (bloß vier Seiten lange) lesenswerte Aufsatz heruntergeladen werden

Moore äußert sich nur über die Integrationsdichte von, wie wir heute sagen würden, VLSI-Chips. Allerdings geht mit der von ihm vorhergesagten Verdopplung der Anzahl der Transistoren je IC im Rhythmus von zwei Jahren auch eine Steigerung der Rechenleistung von Computern einher. Deswegen geht man auch davon aus, daß sich ca. alle 24 Monate die von Computern erreichte Rechengeschwindigkeit verdoppelt.

Wenn wir die Gültigkeit des Mooreschen Gesetzes voraussetzen, in welchem Jahr wird man die Aufzählung der 25-Löcher-Touren in 11 Tagen durchführen können?