Prof. Dr. Rolf Wanka
Sabine Helwig, Matthias Hoffmann, Philipp Schneider

Erlangen, 24. November 2009
Abgabe bis $\boxed{\text{30. November 2009, 16:10 Uhr}}$

Übungen zur Vorlesung

Berechenbarkeit und Formale Sprachen

WS 2009/2010

Blatt 5

Je mehr Plus-Zeichen $+$ bei einer Aufgabe, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

AUFGABE 26:
[Präsensaufgabe, $+++,\star\star$] Sei $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

(a) Beschreiben Sie *informell* eine deterministische 2-Band-Turingmaschine, die L entscheidet.

(b) Geben Sie formal eine (im O-Kalkül) schnellere nichtdeterministische 2-Band-Turingmaschine an, die L akzeptiert. Beschreiben Sie ihre Arbeitsweise und geben Sie ihre exakte Laufzeit an.

Die folgenden Aufgaben sind „klassische Hausaufgaben“, die Sie bearbeiten und gelöst abgeben.

AUFGABE 27 (4 Punkte)**:**
[$+++,\star\star$] Zeigen Sie:

$$L_1 = \{\langle M\rangle \mid M \text{ ist deterministische 1-Band-TM, die nur für die Eingabe 101 hält}\}$$

ist nicht rekursiv aufzählbar.

AUFGABE 28 (4 Punkte)**:**
[$++,\star\star\star$] Zeigen Sie, daß die Sprache

$$L_2 = \{\langle M\rangle \mid \text{es gibt eine Eingabe } x \in \{0,1\}^*\text{, so daß } M \text{ gestartet mit } x \text{ irgendwann einmal mindestens fünfmal unmittelbar hintereinander den Kopf nach rechts bewegt}\}$$

nicht entscheidbar ist.

Hinweis: Eine Reduktion z. B. des Halteproblems H auf L_2 wird natürlich auch hier zum Ziel führen. Allerdings, das einfache „Drumherumprogrammieren“, wie wir es bislang eigentlich immer gemacht haben, klappt nicht. (Überlegen Sie sich warum!)

AUFGABE 29 (4 **Bonus**- Punkte)**:**
[$+++,\star$] Zeigen Sie: Die Funktion(!) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{Das Notebook der Bundeskanzlerin enthält höchstens } n \text{ Siliziumatome} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist total berechenbar (ohne dazu auf Schraubenzieher, Hammer oder sonstiges Werkzeug zurückgreifen zu müssen).

AUFGABE 30 (4 Punkte)**:**
[$++,\star\star$] Zeigen Sie die folgende, „stärkere“ Variante von Satz 1.23:

> **Satz:** Sei L eine unendliche Sprache. L ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn es eine Turingmaschine M gibt, die eine total berechenbare *bijektive* Funktion $f : \{0,1\}^* \to L$ berechnet.

Hinweis: Es geht darum, daß f für verschiedene Eingaben verschiedene Wörter aus L ausgeben muß, und daß jedes Wort von L ausgebbar sein muß. Im Beweis geht es eigentlich nur um die Richtung „$\Rightarrow$“.
Interpretieren Sie die Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ als zur Basis 2 dargestellte natürliche Zahl $n_x = (1x)_2$. Benutzen Sie die Maschine M_g aus der Richtung „$\Rightarrow$“ des Beweises von Satz 1.23. Sie dürfen Ihren Algorithmus auf höherem, programmiersprachen-ähnlichen Niveau beschreiben.

AUFGABE 31 (4 **Bonus**- Punkte)**:**
[$+++,\star\star$] (*Hinweis: Es kommt zwar viel Text, aber ihn zu lesen lohnt sich in vielerlei Hinsicht.*)

Wir sagen im folgenden: Eine Turingmaschine berechnet eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, falls sie für alle $n \in \mathbb{N}$ bei Eingabe 1^{n+1} nach endlich vielen Schritten hält und dann auf dem Band $1^{f(n)+1}$ steht. Eine solche Funktion wird im Englischen als *total recursive* bezeichnet.
Der folgende Text ist abgeschrieben aus dem Buch: J. BARWISE (Editor), “Handbook of Mathematical Logic”, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977. Führen Sie den bloß skizzierten Beweis aus.

> We can give a specific example of a non-computable function by using the “busy beaver competition” of RADO [1962]. An n-state entry in this competition is a Turing machine M with $\Sigma = \{1\}$, $\Gamma = \{B,1\}$ and $n+1$ states $q_0,\dots,q_n$, the last of which is used only for halting (both $\delta(q_n,B)$ and $\delta(q_n,1)$ are undefined), and such that when started on a blank tape, M eventually halts. When M does halt, its score in the competition is the number of 1’s on the tape. Thus the machine tries to write as many 1’s on the tape as it possibly can, but it must halt. Let $\mathrm{BB}(n)$ be the maximum possible score for an n-state entry.
>
> 2.2 THEOREM (RADO [1962]). *The function* BB *ist not computable. In fact for any total recursive f on* $\mathbb{N}$*, we have $f(x) < \mathrm{BB}(x)$ for all sufficiently large x.*
>
> PROOF (SKETCH). The function whose value at x is
>
> $$\max[f(2x+2), f(2x+3)]$$
>
> is computable, and hence is computed by some machine M having, say, k states. For each x, consider a machine N_x that writes 1^{x+1} on a blank tape and then behaves like M. Then N_x is a $(x+k+2)$-state entry in the busy beaver competition. So its score (the number displayed above plus 1) is bounded by $\mathrm{BB}(x+k+2)$, which for all $x \geq k$ is bounded by $\mathrm{BB}(2x+2)$. $\square$
>
> T. RADO, *On non-computable functions*, The Bell System Technical Journal, vol. 41, no. 3, pp. 877–884, May 1962

Es reicht natürlich nicht, diesen Text einfach zu übersetzen. Insbesondere ist noch nicht klar, warum nun BB tatsächlich nicht berechenbar ist.
Zum Verständnis ganz wichtig: Schauen Sie das Wort „eventually“ in einem Wörterbuch nach, es hat eine andere Bedeutung als das deutsche Wort „eventuell“! (Das ist ein sog. „falscher Freund“, d. h. ähnliche Wörter haben in zwei Sprachen unterschiedliche Bedeutungen. Ein weiteres derartiges Wort ist z. B. „to irritate“. Ebenso hat das Wort „Sketch“ hier nichts mit Comedy zu tun.)

Übrigens, bislang sind die folgenden Werte für BB bekannt:

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\mathrm{BB}(n)$	1	4	6	13	≥ 4098	$\geq 1{,}2 \cdot 10^{865}$	$\cdots$

Bitte den Wochentag und die Uhrzeit Ihrer Übungsgruppe auf die Abgabe schreiben!
Abgabe im Briefkasten links vor dem blauen Hochhaus.
`http://www12.informatik.uni-erlangen.de/edu/BFS/WS0910/`