Prof. Dr. Rolf Wanka
Sabine Helwig, Matthias Hoffmann, Philipp Schneider

Erlangen, 17. November 2009
Abgabe bis $\boxed{\text{23. November 2008, 16:10 Uhr}}$

Übungen zur Vorlesung

**Berechenbarkeit und Formale Sprachen**

WS 2009/2010

Blatt 4

Je mehr Plus-Zeichen $+$ bei einer Aufgabe, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

**AUFGABE 20:**
[Präsenzaufgabe, $++++,\star\star\star$] Zeigen Sie:

$$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält für genau eine Eingabe}\}$$

ist **nicht rekursiv aufzählbar**.

*Hinweis*: Zeigen Sie: $\bar{H} \leq L$

Die folgenden Aufgaben sind „klassische Hausaufgaben“, die Sie bearbeiten und gelöst abgeben. ☺

---

**AUFGABE 21** (4 Punkte)**:**
[$+++,\star\star$] $M$ bezeichne eine deteterministische 1-Band-Turingmaschine. Betrachten Sie die Sprache

$$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält mindestens für die Eingabe } 110\}\ .$$

Zeigen Sie:

(a) $L$ ist unentscheidbar.

(b) $L$ ist rekursiv aufzählbar.

**AUFGABE 22** (4 Punkte)**:**
[$+++,\star\star$] $M$ bezeichnet im folgenden immer eine deteterministische 1-Band-Turingmaschine. Zeigen Sie mittels Reduktionen, daß die folgenden Sprachen unentscheidbar sind.

(a) $L_1 := \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält für jede Eingabe}\}$ (Totalitätsproblem)

(b) $L_2 := \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält für endlich viele Eingaben}\}$ (Endlichkeitsproblem)

**AUFGABE 23** (4 Punkte)**:**
[$+++,\star\star$] $M$ bzw. $M'$ bezeichnen im folgenden immer eine deteterministische 1-Band-Turingmaschine. Zeigen Sie mittels Reduktion, daß die folgenden Sprachen unentscheidbar sind.

(a) $L_3 := \{(\langle M\rangle, \langle M'\rangle) \mid \text{für jede Eingabe, für die } M \text{ hält, hält } M' \text{ nicht, und umgekehrt}\}$

(b) $L_4 = \{\langle M\rangle w \mid w = \mathrm{bin}(k), k \in \mathbb{N}, \text{ es gibt genau } k \text{ verschiedene Eingaben, für die } M \text{ hält}\}$
(alte Klausuraufgabe)

*Zur Erinnerung*: $\mathrm{bin}(k)$ bezeichnet die Binärdarstellung von $k$, also z. B. $\mathrm{bin}(42) = 101010$.

**AUFGABE 24** (4 Punkte)**:**
[$++,\star\star\star$] Ist die Sprache

$$L := \{\langle M\rangle w \mid M \text{ ist deteterministische 1-Band-TM, } w = \mathrm{bin}(k),\ k \in \mathbb{N}, \text{ und es gibt eine Eingabe } x \in \{0,1\}^*, \text{ so daß } M, \text{ gestartet mit } x, \text{ mindestens } k \text{ echte Kopfbewegungen ausführt}\}$$

entscheidbar? Beweisen Sie Ihre Antwort.

*Hinweis*: „Echte“ Kopfbewegung bedeutet, daß *nicht* die „Richtung“ N ausgeführt wird. Die $k$ echten Kopfbewegungen brauchen nicht hintereinander ausgeführt zu werden!

Zur Lösung ist Aufgabe 13 von Blatt 2 relevant.

**AUFGABE 25** (4 **Bonus**- Punkte)**:**
Betrachten Sie folgenden Lösungsansatz für Aufgabe 12 und finden Sie den versteckten Fehler.

Zu zeigen: Sind zwei Sprachen rekursiv aufzählbar, dann ist auch deren Umzingelung rekursiv aufzählbar.

Rekursive Aufzählbarkeit bedeutet ja, dass alle Wörter aus $L_1$ und alle Wörter aus $L_2$ jeweils mit einer Turingmaschine verifiziert werden können.
Wir verwenden zur Verifizierung der Umzingelung nun eine 2-dimensionale Turingmaschine. Wir kopieren die Eingabe in die darunter liegenden Zeilen, wobei wir jeweils den ersten Eintrag weglassen und das Wort um 1 nach links verschieben. Dadurch entsteht eine Art Dreiecksmatrix auf dem Band. Die erste Zeile soll doppelt auftauchen, das erleichtert die Arbeit bzgl. des leeren Worts. Für die Eingabe $[abcde]$ erhalten wir als Bandbelegung nach unserer Vorbereitungsarbeit beispielsweise das Bild rechts. Der L/S-Kopf wird auf $a$ verschoben.

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e & \\ b & c & d & e & & \\ c & d & e & & & \\ d & e & & & & \\ e & & & & & \end{array}$$

Wir beginnen unsere Analyse in der 1. Zeile und prüfen zunächst, ob das leere Wort in $L_1$ liegt. Dies ist möglich, weil $L_1 1$ ja rekursiv aufzählbar ist. Wir verwenden dazu eine „Untermaschine“, die wir auf einem zweiten Band laufen lassen. Ist es nicht in $L_1$, muss die Maschine nicht zwingend halten, weshalb an dieser Stelle eine Endlosschleife möglich ist. Wir wissen aber sehr wohl, dass die entsprechende Untermaschine $t(n)$-zeitbeschränkt ist für alle korrekten Eingaben, denn diese sind für jedes $n$ nur endlich viele und dann können wir ja jeweils das Maximum bilden. Wir können also zu Beginn auf einem dritten Band (möglicherweise mehrspurig erforderlich) eine entsprechende Anzahl an Einträgen schreiben und dieses dann als Zählband mitlaufen lassen. Die Abhängigkeit von $n$ ist nicht schlimm, denn wir können $n$ ja aus der Eingabe ermitteln. Nun haben wir erreicht, dass unsere Untermaschine $L_1$ und $L_2$ entscheiden kann. Somit haben wir das Problem von Endlosschleifen aus dem Weg geräumt, in dem wir eine Untersuchung einfach abbrechen, sobald der Kopf auf Band 3 die Zählgrenze erreicht hat. Kommen wir also zurück zu dem Fall, dass das leere Wort nicht in $L_1$ liegt. Dann untersuchen wir $a$. Liegt das auch nicht in $L_1$, dann $ab$, etc. so lange, bis wir entweder eine Kombination $a\ldots$ gefunden haben, die in $L_1$ liegt, oder alle Kombinationen abgelehnt haben.
Haben wir eine gefunden, dann betrachten wir jeweils die Spalte unter dem letzten Eintrag dieser Sequenz $a\ldots$ (beim leeren Wort die komplette 1. Spalte) Mit dieser verfahren wir dann analog zur 1. Zeile bzgl. $L_2$ (wieder auf einer Untermaschine auf Band 2, wir verwenden ein 4. Band als Zähler für die Untermaschine bzgl. $L_2$). Stoßen wir dann innerhalb der Spalte auf eine Sequenz aus $L_2$, so untersuchen wir wieder die Zeile neben dem letzten Eintrag bzgl. $L_1$.
Erfolg $\Rightarrow$ Eingabe liegt in $\mathrm{umz}(L_1, L_2)$.
kein Erfolg $\Rightarrow$ gehe zurück zur Spaltenanalyse und führe diese fort.
auch kein Erfolg $\Rightarrow$ zurück zur 1. Zeile.
Damit haben wir dann alle möglichen Kombinationen untersucht, die eine Umzingelung bilden können. Unsere Maschine ist damit also in der Lage, $\mathrm{umz}(L_1, L_2)$ zu entscheiden, die Umzingelung ist somit rekursiv aufzählbar. q.e.d.

(Mit freundlicher Genehmigung des Autors wiedergegeben.)

*Bitte den Wochentag und die Uhrzeit Ihrer Übungsgruppe auf die Abgabe schreiben!*
*Abgabe im Briefkasten links vor dem blauen Hochhaus.*
`http://www12.informatik.uni-erlangen.de/edu/BFS/WS0910/`