

Übungen zur Vorlesung

Berechenbarkeit und Formale Sprachen

WS 2009/2010

Blatt 3

Am kommenden Donnerstag, d. 12. November 2009 wird einmalig die Vorlesung im Hörsaal H3 im Hörsaalgebäude am roten Platz vor dem Chemiegebäude (Egerlandstr. 3) stattfinden.

Je mehr Plus-Zeichen + bei einer Aufgabe, desto wichtiger, je mehr Sterne *, desto schwieriger.

AUFGABE 15:

[Präsenzaufgabe, + + + +, **] M bezeichne eine deterministische 1-Band-Turingmaschine. Betrachten Sie die Sprache

$$L = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält für mindestens zwei Eingaben} \} .$$

Zeigen Sie:

- (a) L ist unentscheidbar.
- (b) L ist rekursiv aufzählbar.

Die folgenden Aufgaben sind „klassische Hausaufgaben“, die Sie bearbeiten und gelöst abgeben. ☺

AUFGABE 16 (4 Punkte):

[+ +, **] A k -head single-tape Turing machine has some fixed number, k , of heads. The heads are numbered 1 through k , and a move of the TM depends on the state and on the symbol scanned by each head. In one move, the heads may each move independently left, right, or remain stationary.

Prove the following theorem.

Theorem If L is accepted by some k -head single-tape TM M_1 , then it is accepted by a one-head single-tape M_2 .

AUFGABE 17 (4 Punkte):

[+ + +, **] In der Vorlesung wurde eine universelle 3-Band-Turingmaschine M_0 vorgestellt, die jede $t(n)$ -zeit- und $s(n)$ -platzbeschränkte 1-Band-Turingmaschine M in Zeit $O(t(n))$ auf Platz $O(s(n))$ simuliert.

Wenn Sie nun diese Simulation auf einer 1-Band-Turingmaschine M'_0 gemäß Satz 1.7 der Vorlesung (Stichwort: *Spurtechnik*) simulieren, bekommen Sie eine Laufzeit der somit universellen 1-Band-Turingmaschine M'_0 von $O(t(n) \cdot s(n))$.

- (a) Wo verliert die 1-Band-Turingmaschine M'_0 bei der Simulation von M_0 den Faktor $s(n)$?
- (b) Überlegen Sie sich einen Trick, wie man die Laufzeit von M'_0 auf $O(t(n))$ senken kann, d. h. Sie brauchen sich insgesamt keine neue Simulation auszudenken, um — als das Ergebnis dieser Aufgabe — eine universelle 1-Band-Turingmaschine M''_0 anzugeben, die jede $t(n)$ -zeit- und $s(n)$ -platzbeschränkte 1-Band-Turingmaschine M in Zeit $O(t(n))$ auf Platz $O(s(n))$ simuliert.

Hinweis: Wie schon in der Vorlesung erwähnt: die Gödelnummer einer Turingmaschine hat immer die Länge $O(1)$. Wenn man das mal nicht ausnutzen kann ... ☺

AUFGABE 18 (4 Punkte):

[+, *] Sei $M = \{N \mid N \text{ ist eine Menge mit } N \notin N\}$. Mit anderen Worten, M ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Zeigen oder widerlegen Sie: $M \in M$.

AUFGABE 19 (4 Punkte):

[+ + +, *] Seien L_1 und L_2 beliebige Sprachen. Beantworten Sie die folgenden Fragen (und beweisen Sie Ihre Antworten).

- (a) Ist L_1 unentscheidbar und $L_1 \subseteq L_2$, ist dann L_2 notwendigerweise unentscheidbar?
- (b) Ist L_1 entscheidbar und $L_1 \supseteq L_2$, ist dann L_2 notwendigerweise entscheidbar?
- (c) Ist L_1 entscheidbar und L_2 rekursiv aufzählbar, ist dann notwendigerweise $L_1 \setminus L_2$ rekursiv aufzählbar? („\“ bezeichnet dabei die Mengendifferenz)

Beachten Sie, daß diese Aufgabe nur einen * hat. Jedoch ist meistens die erste Idee nicht richtig.

Bitte den Wochentag und die Uhrzeit Ihrer Übungsgruppe auf die Abgabe schreiben!
Abgabe im Briefkasten links vor dem blauen Hochhaus.
<http://www12.cs.fau.de/edu/BFS/WS0910/>