Prof. Dr. Rolf Wanka
Sabine Helwig, Matthias Hoffmann, Philipp Schneider

Erlangen, 3. November 2009
Abgabe bis $\boxed{\text{Mo., 9. November 2009, 16:10 Uhr}}$

Übungen zur Vorlesung

Berechenbarkeit und Formale Sprachen

WS 2009/2010

Blatt 2

Je mehr Plus-Zeichen $+$ bei einer Aufgabe, desto wichtiger, je mehr Sterne $\star$, desto schwieriger.

AUFGABE 10:
[Präsenzaufgabe, $++,\star\star$]

(a) Geben Sie eine deterministische 1-Band-Turingmaschine M an, die einen Doppelshift nach rechts durchführt. D. h. M hat die Eingabe $w = w_1 \ldots w_n$ und soll jedes Zeichen w_i um zwei Zellen nach rechts verschieben. Als Unterprogramm wird diese Aufgabe häufig benötigt.

(b) Beschreiben Sie informell eine deterministische 1-Band-Turingmaschine M, die die Multiplikation berechnet. D. h. für $a, b \in \mathbb{N}$ ist $\text{bin}(a)\#\text{bin}(b)$ die Eingabe und $\text{bin}(a \cdot b)$ die Ausgabe. Dabei bezeichnet $\text{bin}(n)$ die Binärdarstellung der natürlichen Zahl n.

Die folgenden Aufgaben sind „klassische Hausaufgaben“, die Sie bearbeiten und gelöst abgeben. ☺

AUFGABE 11 (4 Punkte)**:**
[$++,\star$] Eine *deterministische Halbband-Turingmaschine* ist ähnlich einer deterministischen 1-Band-Turingmaschine definiert, nur daß das Band nicht in beide Richtungen unendlich lang ist, sondern bloß in eine Richtung („nach rechts“).

- Zeigen Sie: Zu jeder deterministischen 1-Band-TM M gibt es eine deterministische Halbband-TM $\tilde{M}$, die die Rechnung von M simuliert.

  Hinweis: Es ist eine gute Idee, die Zelle am linken Bandende, unter der zu Beginn der Lese-/Schreibkopf und in der das erste Zeichen der Eingabe steht, durch etwas Spezielles zu markieren und die Programmiertechniken aus der Vorlesung anzuwenden.

- Wenn M eine $t(n)$-zeit- und $s(n)$-bandbeschränkte 1-Band-Turingmaschine ist, welche Zeit- und Bandbeschränkung hat dann $\tilde{M}$?

AUFGABE 12 (4 Punkte)**:**
[$+++,\star\star\star$] Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen über dem Alphabet Σ, d. h. zur Erinnerung: $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Die *Umzingelung* von L_2 durch L_1 ist $\text{umz}(L_1, L_2) := \{z \mid \exists u, v \in L_1 \exists w \in L_2 : z = uwv\}$.

Zeigen Sie: Sind L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar, dann ist auch $\text{umz}(L_1, L_2)$ rekursiv aufzählbar.

Hinweis: Die Eingabe ist z, und auf eine schlaue Art und Weise müssen Zerlegungen von z „durchprobiert“ werden. Gefährlich wird es, wenn man sich dabei in Endlosschleifen „aufhängt“, obwohl noch nicht alle Zerlegungen durchprobiert wurden. Das muß verhindert werden! Die 2-dimensionale Turingmaschine aus Aufgabe 9 kann bei einem Lösungsansatz hilfreich sein.

AUFGABE 13 (4 Punkte)**:**
[$+++,\star\star$] Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ eine $s(n)$-bandbeschränkte deterministische 1-Band-Turingmaschine, und sei $w = w_1 \ldots w_n \in \Sigma^n$ eine Eingabe für M.

Wieviele verschiedene Konfigurationen in Abhängigkeit von der Eingabelänge n kann M haben? Oder anders gefragt: Ab wann kann man sagen, daß M gestartet mit w in einer Endlosschleife hängt?

Hinweis: Die Anzahl der n-Tupel mit Elementen aus einer Menge A ist $|A|^n$.

AUFGABE 14 (4 Punkte)**:**
[$+,\star$] Eine 3-Zellen-Registermaschine M_{3Z} ist eine Registermaschine, die nur die Speicherzellen $c(0)$ (den Akkumulator), $c(1)$, $c(2)$ und $c(3)$ hat.

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ eine beliebige 1-Band-Turingmaschine mit Bandalphabet $\Gamma = \{0, 1, B\}$. Beschreiben Sie informell eine 3-Zellen-Registermaschine M_{3Z}, die die TM M simuliert. Dabei soll die Eingabe $\bar{x} \in \{0,1\}^*$ von M in M_{3Z} in Zelle $c(1)$ stehen, und zwar als Zahl $(1\bar{x})_3$, also als Zahl zur Basis 3 (!). Z. B. $\bar{x} = 010$ steht als $(1010)_3 = 30$ in Zelle $c(1)$.

Hinweis: Wie gehen Sie mit dem Blanksymbol B um? Wie verteilen Sie den Bandinhalt auf die Speicherzellen?

Aus Korrekturkapazitätsgründen:
Abgabengruppengröße **mindestens** 3, *höchstens* 4.
Insbesondere: Bitte keine Einzelabgaben
Bitte den Wochentag und die Uhrzeit Ihrer Übungsgruppe auf die Abgabe schreiben!
Abgabe im Briefkasten links vor dem blauen Hochhaus.
`http://www12.informatik.uni-erlangen.de/edu/BFS/WS0910/`