

Übungen zur Vorlesung  
**Berechenbarkeit und Formale Sprachen**

WS 2009/2010

Blatt 2

Je mehr Plus-Zeichen + bei einer Aufgabe, desto wichtiger, je mehr Sterne \*, desto schwieriger.

**AUFGABE 10:**

[Präsenzaufgabe, ++, \*\*]

- (a) Geben Sie eine deterministische 1-Band-Turingmaschine  $M$  an, die einen Doppelshift nach rechts durchführt. D. h.  $M$  hat die Eingabe  $w = w_1 \dots w_n$  und soll jedes Zeichen  $w_i$  um zwei Zellen nach rechts verschieben. Als Unterprogramm wird diese Aufgabe häufig benötigt.
- (b) Beschreiben Sie informell eine deterministische 1-Band-Turingmaschine  $M$ , die die Multiplikation berechnet. D. h. für  $a, b \in \mathbb{N}$  ist  $\text{bin}(a)\#\text{bin}(b)$  die Eingabe und  $\text{bin}(a \cdot b)$  die Ausgabe. Dabei bezeichnet  $\text{bin}(n)$  die Binärdarstellung der natürlichen Zahl  $n$ .

Die folgenden Aufgaben sind „klassische Hausaufgaben“, die Sie bearbeiten und gelöst abgeben. ☺

**AUFGABE 11** (4 Punkte):

[++, \*] Eine *deterministische Halbband-Turingmaschine* ist ähnlich einer deterministischen 1-Band-Turingmaschine definiert, nur daß das Band nicht in beide Richtungen unendlich lang ist, sondern bloß in eine Richtung („nach rechts“).

- Zeigen Sie: Zu jeder deterministischen 1-Band-TM  $M$  gibt es eine deterministische Halbband-TM  $\tilde{M}$ , die die Rechnung von  $M$  simuliert.

*Hinweis:* Es ist eine gute Idee, die Zelle am linken Bandende, unter der zu Beginn der Lese-/Schreibkopf und in der das erste Zeichen der Eingabe steht, durch etwas Spezielles zu markieren und die Programmiertechniken aus der Vorlesung anzuwenden.

- Wenn  $M$  eine  $t(n)$ -zeit- und  $s(n)$ -bandbeschränkte 1-Band-Turingmaschine ist, welche Zeit- und Bandbeschränkung hat dann  $\tilde{M}$ ?

**AUFGABE 12** (4 Punkte):

[+++ , \*\*\*) Seien  $L_1$  und  $L_2$  zwei Sprachen über dem Alphabet  $\Sigma$ , d. h. zur Erinnerung:  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ . Die *Umzingelung* von  $L_2$  durch  $L_1$  ist  $\text{umz}(L_1, L_2) := \{z \mid \exists u, v \in L_1 \exists w \in L_2 : z = u w v\}$ .

Zeigen Sie: Sind  $L_1$  und  $L_2$  rekursiv aufzählbar, dann ist auch  $\text{umz}(L_1, L_2)$  rekursiv aufzählbar.

*Hinweis:* Die Eingabe ist  $z$ , und auf eine schlaue Art und Weise müssen Zerlegungen von  $z$  „durchprobiert“ werden. Gefährlich wird es, wenn man sich dabei in Endlosschleifen „aufhängt“, obwohl noch nicht alle Zerlegungen durchprobiert wurden. Das muß verhindert werden! Die 2-dimensionale Turingmaschine aus Aufgabe 9 kann bei einem Lösungsansatz hilfreich sein.

**AUFGABE 13** (4 Punkte):

[+, \*, \*] Sei  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$  eine  $s(n)$ -bandbeschränkte deterministische 1-Band-Turingmaschine, und sei  $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^n$  eine Eingabe für  $M$ .

Wieviele verschiedene Konfigurationen in Abhängigkeit von der Eingabelänge  $n$  kann  $M$  haben? Oder anders gefragt: Ab wann kann man sagen, daß  $M$  gestartet mit  $w$  in einer Endlosschleife hängt?

*Hinweis:* Die Anzahl der  $n$ -Tupel mit Elementen aus einer Menge  $A$  ist  $|A|^n$ .

**AUFGABE 14** (4 Punkte):

[+, \*] Eine 3-Zellen-Registermaschine  $M_{3Z}$  ist eine Registermaschine, die nur die Speicherzellen  $c(0)$  (den Akkumulator),  $c(1)$ ,  $c(2)$  und  $c(3)$  hat.

Sei  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$  eine beliebige 1-Band-Turingmaschine mit Bandalphabet  $\Gamma = \{0, 1, B\}$ . Beschreiben Sie informell eine 3-Zellen-Registermaschine  $M_{3Z}$ , die die TM  $M$  simuliert. Dabei soll die Eingabe  $\bar{x} \in \{0, 1\}^*$  von  $M$  in  $M_{3Z}$  in Zelle  $c(1)$  stehen, und zwar als Zahl  $(1\bar{x})_3$ , also als Zahl zur Basis 3 (!). Z. B.  $\bar{x} = 010$  steht als  $(1010)_3 = 30$  in Zelle  $c(1)$ .

*Hinweis:* Wie gehen Sie mit dem Blanksymbol  $B$  um? Wie verteilen Sie den Bandinhalt auf die Speicherzellen?

*Aus Korrekturkapazitätsgründen:*

*Abgabengruppengröße mindestens 3, höchstens 4.*

*Insbesondere: Bitte keine Einzelabgaben*

*Bitte den Wochentag und die Uhrzeit Ihrer Übungsgruppe auf die Abgabe schreiben!*

*Abgabe im Briefkasten links vor dem blauen Hochhaus.*

<http://www12.informatik.uni-erlangen.de/edu/BFS/WS0910/>